N° d'ordre 382 Année 1970

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse

en vue de l'obtention

du Grade de Docteur ès Sciences Physiques

par

Christian FONADE

Ingénieur ENSEEHT

Contribution à l'étude de la stabilité et de la dynamique des jets plans - Analogie hydraulique d'un écoulement subsonique interne

Soutenue le 7 Mars 1970 devant la Commission d'Examen

MM. ESCANDE Président

NOUGARO
DAT
GRUAT
SANANES
PIQUEMAL
} Examinateurs

N° d'ordre

Année 1970

THÈSE

présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse

en vue de l'obtention

du Grade de Docteur ès Sciences Physiques

par

Christian FONADE

Ingénieur ENSEEHT

Contribution à l'étude de la stabilité et de la dynamique des jets plans - Analogie hydraulique d'un écoulement subsonique interne

Soutenue le 7 Mars 1970 devant la Commission d'Examen

MM. ESCANDE — Président

NOUGARO
DAT
GRUAT
SANANES
PIQUEMAL
— Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE TOULOUSE

FACULTE DES SCIENCES

PERSONNEL

Administration

M. MATHIS ..... Président du Conseil Transitoire de Gestion
M. AGID ..... Assesseur
M. LELUBRE ..... Assesseur

Honorariat

M. CAPDECOMME..... Doyen honoraire, Recteur honoraire
M. DELTHEIL ..... Recteur honoraire, Doyen honoraire, Professeur honoraire
M. DUPOUY ..... Doyen honoraire, Membre de l'Institut Directeur général honoraire du CNRS
M. DURAND ..... Doyen honoraire
M. FOUCHE ..... Professeur honoraire
M. GAUSSENS ..... Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut
M. JACQUES ..... Professeur honoraire
M. MIGNONAC ..... Professeur honoraire
M. MORQUER ..... Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut
M. VANDEL ..... Professeur honoraire, Membre de l'Institut
M. TEISSIE-SOLIER ..... Professeur honoraire

Professeurs

M. ESCANDE ..... Mécanique des Fluides, Membre de l'Institut
M. DUPOUY ..... Physique, Membre de l'Institut

M. CASTERAS .....Géologie, Correspondant de l'Institut
M. BEDOS .....Chimie
M. CAPDECOMME .....Minéralogie
M. DUPIN .....Radioélectricité
M. NOUVEL .....Biologie Générale
M. GALLAIS .....Chimie, Correspondant de l'Institut
M. DURAND .....Physique
M. FERT ..... Physique
M. DIEHL ..... Agronomie
M. LESBRE ..... Chimie Organique
M. BRUNEL ..... Physiologie Végétale
M. HURON ..... Mathématiques Appliquées
M. MARGULIS ..... Pédologie
M. TRICHE ..... Chimie Analytique et spectrographique
M. LEDOUX ..... Zoologie appliquée
M. RIVALS ..... Agriculture
M. PERRIER ..... Physique
M. MATHIS ..... Chimie
M. ORLIAC ..... Géochimie et Minéralogie
M. LAFOURCADE ..... Physique
M. ANGELIER ..... Zoologie
Mlle de FERRE ..... Botanique
M. FARRAN ..... Minéralogie et Géotechnique
M. LAUDET ..... Physique Théorique et Calcul numérique
M. SARFATY ..... Biologie animale
M. NOUGARO ..... Hydraulique générale et appliquée
M. LAGASSE ..... Electrotechnique
M. GARDY ..... Génie chimique
M. BLANC ..... Physique Nucléaire
M. BIREBENT ..... Electronique Appliquée
M. VOIGT ..... Chimie Minérale
M. LEREDDE ..... Botanique

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543906_0035

M. LELUBRE ..... Géologie
M. TROCHAIN ..... Botanique
M. MASDUPUY ..... Chimie
M. LALAGUE ..... Mathématique générale
M. DESSENS ..... Physique du Globe, Correspondant de l'Institut
M. BOUIGUE ..... Astronomie
M. COUCHET ..... Physique
M. LEJEUNE ..... Chimie
M. LASCOMBES ..... Botanique
M. ASSELINEAU ..... Chimie Biologique
M. MAURET ..... Chimie Systématique
M. AGID ..... Physiologie
M. MONTANT ..... Cryptogamie
M. GAUTIER ..... Physique
M. CRUMEYROLLE ..... Mathématiques
M. GOURINARD ..... Géologie
M. PULOU ..... Minéralogie
M. CAMBOU ..... Physique Spatiale
M. MIQUEL ..... Chimie
M. LACOSTE ..... Electrotechnique
M. THIBAULT ..... Mécanique rationnelle et appliquée
M. MONTEL ..... Chimie Physique et Electrochimie
M. MASCART ..... Mathématiques
M. MEDIONI ..... Psychophysiologie
M. THIRRIOT ..... Hydrodynamique E.N.S.E.E.I.H.T.
M. BRENON ..... Géologie
M. LAFON ..... Calcul Différentiel et Intégral
M. RAYNAUD P..... Physiologie Animale
M. ZALTA ..... Chimie Biologique
M. SEVELY ..... Electrotechnique
M. POMMIEZ ..... Mathématiques
M. REY ..... Biologie Végétale
M. COULOMB ..... Physique

Professeurs associés

M. MANSOUR
M. RICHER

Professeurs sans chaire

M. HAMANT ..... *Botanique*
Mme BRUNEL ..... *Physiologie Végétale*
Mlle BERDUCOU ..... *Physiologie Végétale*
M. MARONI ..... *Chimie*
M. SECONDAT ..... *Zootechnie et Hydrobiologie appliquée*
M. PICCA ..... *Physique*
M. MERIC ..... *Mathématiques Appliquées*
M. BEETSCHEN ..... *Biologie Générale*
Mme LECAL ..... *Zoologie*
M. BUGAREL ..... *Génie Chimique*
M. MIROUSE ..... *Géologie*
M. PILOD ..... *Physique*
M. LARROQUE ..... *Physique*
M. BARRANS ..... *Chimie*
M. TRINQUIER ..... *Physique*
M. GRUAT ..... *Mécanique des Fluides (Hydraulique)*
Mme LAFON ..... *Mathématiques*
Mlle LAPEYRE ..... *Mathématiques (Informatique)*
M. DAT ..... *Mécanique des Fluides*
M. JEANNIN ..... *Chimie Minérale*
M. BERTRAND ..... *Chimie*
M. SATGE ..... *Chimie organique*
M. DESQ ..... *Mathématiques*
M. MAHENC ..... *Chimie*
M. LATTES ..... *Chimie*

M. ROCARD ..... Electronique
M. DECEUH ..... Physique
M. FALLOT ..... Biologie Végétale (viticulture et arboriculture)
M. POILBLANC ..... Chimie
M. TOUZE ..... Physiologie Végétale
M. FRASNAY ..... Mathématiques
M. CASSAGNAU ..... Zoologie
M. GUERIN ..... Mathématiques

Maîtres de Conférences

M. BLANCHARD..... Mathématiques
M. COULON ..... Physique Industrielle
M. HOFFMANN ..... Electronique
M. BITSCH ..... Zoologie
M. FONTAN ..... Physique Nucléaire
M. PESCIA ..... Physique
M. SICARD ..... Biologie Génétique
M. CAUSSINUS ..... Mathématiques Appliquées
M. DE LOTH ..... Chimie Physique
M. MARTY ..... Physique Industrielle
M. BAUDRAS ..... Chimie Biologique
M. DURAND Ph..... Physique
M. LEFEUVRE ..... Electronique ENSEEIHT
M. SOUQUET ..... Géologie
M. SAPORTE ..... Physique
M. ATTEIA ..... Mathématiques
M. ENJALBERT ..... Chimie
M. IMBERT ..... Psychophysiologie
M. SCHNEIDER ..... Biologie Cellulaire
M. ANGELINO .....Génie Chimique

M. DABOSI ..... E.N.S.C.
M. ETTINGER ..... Mathématiques
M. CALVET ..... Mécanique des Fluides (E.N.S.E.E.I.H.T.)
M. PAGANI ..... Physique

Maîtres de Conférences Associés

M. PUN
M. JEAN

Chargés d'Enseignement

M. BEAUFILS ..... Informatique
M. CASTAGNETTO L..... Mathématiques (E.N.S.EE.I.H.T.)
M. DARROZES ..... Mécanique
M. OLIVIER ..... Mathématiques

Personnel de la Faculté affecté à l'Institut National des Sciences Appliquées de TOULOUSE

Professeurs sans chaire

M. CASSIGNOL ..... Génie Electrique
M. COLLETTE ..... Physique

Maîtres de Conférences

M. FAGET ..... Physique
M. TRUCHASSON ..... Mécanique
M. SCHUTTLER ..... Physique
M. ROQUES .....Chimie
M. DRILLAT .....Chimie
M. MIRA .....Génie Electrique
M. GRATELOUP .....Génie Electrique

M. LETURCQ ..... Génie Electrique
M. SIRIEYS ..... Génie Civil
M. MASO ..... Génie Civil
M. DURAND Gilbert ..... Chimie
M. CARRARA ..... Physique
M. CUPPENS ..... Mathématiques

Personnel affecté à l'Institut Universitaire de Technologie de TOULOUSE

Maîtres de Conférences

M. MARTIN..... Génie Electrique
M. THENOZ ..... Minéralogie
M. PERENNOU ..... Informatique

Chargé d'Enseignement

M. REY ..... Génie Electrique

Secrétariat

M. PRINEAU ..... Conseiller Administratif des Services Universitaires

A ma femme

A ma fille

Avec tout mon amour

A mes parents

Avec toute ma reconnaissance

AVANT - PROPOS

- : -

Nous exprimons nos plus vifs remerciements à Monsieur le Professeur ESCANDE, Membre de l'Institut, d'avoir bien voulu nous permettre d'effectuer ces travaux dans le cadre du Laboratoire d'Hydraulique de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique, d'Informatique et d'Hydraulique de Toulouse, et de nous faire l'honneur de présider notre Jury.

Que Monsieur le Professeur NOUGARO, Directeur Technique de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique, d'Informatique et d'Hydraulique de Toulouse, trouve ici l'expression de notre sincère reconnaissance pour avoir toujours su, avec une grande amabilité, résoudre tous les problèmes matériels annexes à nos travaux.

Nous remercions tout particulièrement Monsieur le Professeur DAT qui a su, par sa compétence, diriger efficacement notre étude et par sa compréhension soutenir notre ardeur et notre moral dans les moments difficiles.

Nous remercions également Messieurs GRUAT, Professeur, SANANES, Directeur de recherche au CNRS et PIQUEMAL, Maître de recherche au CNRS, pour leurs conseils et leur aimable acceptation de faire partie de notre Jury.

Nous exprimons toute notre reconnaissance à Messieurs FOHANNO et LEBLANC dont nous avons pu apprécier au plus haut point le sérieux et le dévouement tout au long de nos essais et de la préparation de ce document, ainsi qu'à Monsieur TRIVELLATO pour son efficace collaboration.

Nous remercions aussi Messieurs JEAN et DOURNES qui ont bien voulu nous aider pour la partie calcul numérique de nos travaux.

En la personne de Monsieur CASTEX, nous exprimons enfin notre sincère gratitude à l'ensemble du personnel du Laboratoire, notamment à Madame BOUDIGUE pour la mise en page du présent document.

TABLE DES MATIERES

- : -

AVANT PROPOS

Ière PARTIE :

ANALOGIE HYDRAULIQUE D'UN ECOULEMENT SUBSONIQUE INTERNE

Chapitre I - Introduction et but de l'étude 5

I. 1. Etude bibliographique 8

I. 2. But de l'étude 12

Chapitre II - Etude théorique de l'analogie 15

II. 1. Ecoulement d'un fluide incompressible avec surface libre 18

II. 2. Ecoulement d'un fluide compressible en charge 21

II. 3. Détermination des relations d'analogie 22

II. 4. Expression des résultats - Relations d'utilisation 26

II. 5. Critique des hypothèses 28

a. Composantes turbulentes de la vitesse 28

b. Composantes verticales de la vitesse dans le modèle à surface libre 29

c. Ecoulement plan dans le modèle en charge 30

II. 6. Validité et utilisation de l'analogie hydraulique 31

a. Influence de la valeur de l'exposant polytropique 31

b. Influence de la valeur de la profondeur de liquide 32

c. Influence de la valeur du nombre de Reynolds des écoulements 33

d. Influence de la nature des parois 34

Chapitre III - Etude expérimentale 35

III. 1. Conception générale des "Tables à surface libre" 37

III. 2. Description des installations et des méthodes de mesure 39

a. Description des installations 39

b. Méthodes de mesure et de visualisation 41

III. 3. Premiers résultats obtenus sur table à eau 42

III. 4. Etude expérimentale de l'analogie hydraulique : comportement statique 43

a. Utilisation de la bascule monostable 44

b. Utilisation de la bascule bistable 46

III. 5. Etude expérimentale de l'analogie hydraulique : comportement dynamique 48

Chapitre IV - Conclusions 51

Références 55

2ème PARTIE :

ETUDE DE LA STABILITE ET DE LA DYNAMIQUE DES JETS PLANS

Chapitre I - Introduction et but de l'étude 65

I. 1. La stabilité et la dynamique des jets en fluidique 67

I. 2. Buts de l'étude 69

Chapitre II - Etude des caractéristiques du jet 73

II. 1. Profils des vitesses du jet 75

II. 2. Calcul de l'épaisseur de quantité de mouvement 77

II. 3. Calcul de la quantité de mouvement du jet 78

a. Région initiale du jet 79

b. Région de jet établi 80

Chapitre III - Etude théorique de l'écoulement dans un jet libre au voisinage du noyau potentiel 83

III. 1. Etude qualitative de l'écoulement 85

III. 2. Etude théorique de la stabilité 87

a. Hypothèses 89

b. Mise en équations 91

c. Etude d'une perturbation symétrique 97

1. Résultats concernant $\Phi(Y)$ et $\Phi'(Y)$ 98

2. Résultats concernant A - Influence d'une couche limite initiale 101

d. Etude d'une perturbation antisymétrique 103

III. 3. Caractéristiques théoriques des rues de tourbillons 104

a. Abscisse de formation et fréquence des tourbillons 105

b. Vitesses et distances entre tourbillons 108

c. Conclusions 109

Chapitre IV - Etude expérimentale de l'écoulement dans un jet libre au voisinage du noyau potentiel 111

IV. 1. Description des installations 113

IV. 2. Méthodes de mesure 113

IV. 3. Etude qualitative de l'écoulement 114

IV. 4. Etude de la fréquence des tourbillons 117

IV. 5. Vitesses de déplacement et distances entre tourbillons 118

IV. 6. Conclusions 119

Chapitre V - Relations entre les tourbillons et le débit d'entraînement du jet 121

Chapitre VI - Fonctionnement dynamique d'un jet plan 129

VI. 1. Influence de la quantité de mouvement du jet 131

VI. 2. Déviation statique d'un jet par une différence de pression $\Delta p(x)$ 132

VI. 3. Dynamique des jets plans 135

Chapitre VII - Conclusions 141

Références 145

PREMIERE PARTIE

ANALOGIE HYDRAULIQUE D'UN

ECOULEMENT SUBSONIQUE INTERNE

NOTATIONS (Ière partie)

A : Aire de la section considérée

C_p, C_v : Chaleurs spécifiques à pression et volume constants

$\vec{F}$: Force extérieure appliquée à l'unité de masse

g : Accélération de la pesanteur

H : Cote de la surface libre par rapport au plan de référence

h : Cote du fond du modèle par rapport au plan de référence

k : Exposant polytropique

$oxyz$: Trièdre orthonormé de référence

p : Pression statique

p_a : Pression atmosphérique

Q_m : Débit massique

$q_m = \frac{Q_m}{Q'_m}$: Rapport d'analogie des débits massiques

x_p : Distance buse-partiteur

$\vec{U}(u, v, w)$: Vecteur vitesse en un point

Z : Profondeur de liquide dans le modèle

$\alpha, \beta, \lambda, \tau$: Rapport d'échelles de similitude (vitesse, viscosité, longueurs, temps)

μ : Coefficient de viscosité dynamique

ν : Coefficient de viscosité cinématique

$\theta = \frac{Z}{\rho'}$: Invariant de l'analogie

ρ : Masse volumique

h' : Hauteur des canaux du module "air"

Indices :

$(')$: Quantités relatives au gaz

o : Conditions à l'infini amont

∞ : Conditions à l'infini aval

CHAPITRE I

- : -

INTRODUCTION ET BUT DE L'ETUDE

Depuis le début du siècle, l'analogie entre l'écoulement graduellement varié d'un liquide présentant une surface libre et l'écoulement bidimensionnel isentropique d'un gaz, a fait l'objet de nombreuses études et applications relatives à des phénomènes particuliers.

L'introduction de l'analogie dans l'étude des modules fluidiques est intéressante du fait, d'une part de la complexité des phénomènes mis en jeu et d'autre part de la dimension absolue des canaux. Dans ce cas, l'intérêt d'une telle méthode est triple :

- tout d'abord il permet de réaliser des maquettes beaucoup plus grandes par procédés peu couteux et facilement mis en oeuvre. Lors de l'étude d'un module fluidique élémentaire un rapport d'échelle de 50 est réalisable avec une installation hydraulique courante. La nouvelle dimension des maquettes permet alors d'éliminer certains phénomènes parasites, comme en particulier la précision d'exécution d'un module fluidique.

- en second lieu, les dimensions des écoulements sont alors telles que l'on peut introduire des appareils de mesure sans créer des perturbations trop importantes. Le fait d'avoir une surface libre permet de plus de disposer ces instruments en n'importe quel point de l'écoulement.

- enfin, les méthodes de visualisation pour un écoulement de liquide à surface libre sont d'une utilisation plus commode et rapide qu'avec un écoulement gazeux. Le rapport d'échelle

est encore ici bénéfique car il permet la visualisation en un point très particulier de l'écoulement.

L'analogie hydraulique permettrait donc une meilleure compréhension de l'intéraction des divers écoulements, à condition toutefois qu'elle ne nous donne pas uniquement une représentation plus ou moins schématique des écoulements réels. Un seul intérêt du point de vue qualitatif enlèverait évidemment un avantage certain à la méthode de l'analogie hydraulique. Aussi est-il nécessaire avant de l'utiliser comme moyen d'étude, d'en déterminer l'intérêt quantitatif. De nombreuses études ayant été réalisées dans le cadre de cette analogie, nous proposons tout d'abord une étude bibliographique qui précèdera l'exposé des buts de la présente étude.

I.1. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

La première utilisation de l'analogie hydraulique fut celle de ISAACHSEN (réf. 1) en 1911, appliquée à l'étude expérimentale de l'écoulement dans un ajutage et de l'élargissement brusque.

En 1920, et à la suite des travaux effectués par STODOLA sur des écoulements gazeux, JOUGUET (réf. 2) présente la possibilité d'une analogie entre le mouvement par tranches de l'eau dans un canal et celui d'un gaz dans un tuyau rectiligne. A partir de l'hypothèse de répartition hydrostatique des pressions pour l'écoulement hydraulique, on montre que les mouvements des deux fluides sont identiques si la loi de compressibilité du gaz est telle que la pression varie proportionnellement au carré de la masse volumique. Ce gaz est appelé par JOUGUET "gaz hydraulique" et a comme valeur 2 pour le rapport des chaleurs spécifiques à pression et à volume constants.

En 1934, RIABOUCHINSKY (réf. 3) montre qu'en première approximation, les deux écoulements sont déterminés par des fonctions courant

obéissant aux mêmes conditions aux limites. La masse volumique du gaz joue alors le même rôle que la profondeur de liquide. Une première étude quantitative expérimentale de cette analogie a été effectuée par WORONETZ (réf. 4) en 1939 et avait en particulier pour but d'analyser l'importance de la condition concernant la loi de compressibilité du gaz. On étudie d'une part des écoulements externes (écoulement autour d'une arête, étude des ailes sustentatrices) et d'autre part l'écoulement à grande vitesse dans un ajutage.

A la même époque, PREISWERK (réf. 5) publie une étude théorique complète de l'analogie. Cette étude, basée sur l'équation de l'énergie, permet de retrouver la notion de "gaz hydraulique" introduite par JOUGUET.

En 1947 paraissent les travaux expérimentaux d'ORLIN, LINDNER et BITTERLY (réf. 6) concernant des écoulements subsoniques autour de cylindres. Ces études font apparaître les difficultés expérimentales qui proviennent du fait des hypothèses et des phénomènes parasites tels que les ondes capillaires qui n'existent que dans le cas d'un écoulement à surface libre. Ces techniques expérimentales sont aussi la base des travaux de doctorat de FLOWERS (réf. 7) et sont appliqués à l'étude du régime transonique autour de profils et de cylindres. Il note l'influence de la planéité de la dalle de verre utilisée car le tirant d'eau est alors faible (de l'ordre de 6 mm).

En 1949, SHAPIRO (réf. 8) publie un rapport dans lequel il étudie l'influence de la viscosité, du rapport des chaleurs spécifiques et de la vitesse de propagation des ondes, dans l'application de l'analogie au régime supersonique.

SUPINO (réf. 9) montre en 1951 que dans le cadre de l'étude des modèles en hydraulique, l'analyse dimensionnelle peut être appliquée en liaison avec l'analogie.

Les premières réalisations amènent cependant des réserves, en particulier en ce qui concerne les phénomènes de propagation d'ondes qui constituent alors les principales applications de l'analogie. Ainsi, en 1952, LAITONE (réf. 10), dans le cadre de l'étude du régime transonique, montre l'influence de la vitesse de propagation d'une onde élémentaire et de la vitesse de propagation de groupe, cette dernière étant l'analogue de la vitesse de propagation d'une onde dans un gaz. On voit ainsi les difficultés qui apparaissent lors du dépouillement des visualisations hydrauliques.

En 1954, et à l'occasion du Jubilé Scientifique de RIABOUCHINSKY, HARLEMAN et IPPEN (réf. 11) et LAITONE (réf. 12) ont résumé leurs travaux et ont particulièrement discuté les limitations de l'analogie. On montre que certaines corrections permettent d'obtenir des résultats quantitatifs corrects en passant successivement des résultats hydrauliques au "gaz hydraulique" puis au gaz réel.

Les problèmes de viscosité et d'ondes sont aussi traités par BRYANT dans le cas d'écoulements internes (réf. 13) et externes.

En 1962 paraissent les travaux de doctorat de HOYT (réf. 17) qui utilise l'analogie comme méthode d'expérimentation, dans le cas d'écoulements supersoniques dans des tuyères dont les parois aval sont de longueurs différentes.

Les conditions d'analogie font aussi l'objet de l'article publié en 1962 par DYMENT et GONTIER (réf. 18). On montre que la loi de compressibilité du "gaz hydraulique" peut être différente de celle généralement utilisée, dans le cas d'écoulements par tranches. De plus, ces auteurs font intervenir les phénomènes de couche limite qui prennent une grande importance lorsqu'on respecte la condition de tirant d'eau imposée par la vitesse de propagation d'une onde. On voit ainsi la difficulté à laquelle on se heurte car le problème des couches limites dans le cadre de l'ana-

logie incompressible-compressible a été étudié principalement du point de vue théorique (réf. 20, 21, et 22).

Enfin en 1967, WARREN (réf. 23) publie ses travaux concernant l'application de l'analogie à des écoulements subsoniques internes. L'élément utilisé est un "diviseur d'écoulement" non symétrique, le rapport λ entre une dimension du modèle eau et celle du modèle air étant égal à 5. Nous retiendrons de ces résultats que le nombre de Reynolds n'a pratiquement aucune influence et que les mesures paraissent meilleures lorsque le tirant d'eau est le plus fort. Ce dernier point marque donc une différence importante quant à l'application de l'analogie selon la nature du régime de l'écoulement considéré.

Nous citerons enfin les travaux de BYRD, WILLIAMS et BARCLAY, relatifs à la fluidique. En 1963, BYRD et WILLIAMS (réf. 24) ont étudié la répartition des pressions sur la paroi lors de l'attachement d'un jet, et BARCLAY (réf. 25) a utilisé un modèle à surface libre pour la mise au point d'un amplificateur bistable à trois étages. Cette étude ne comporte pas de comparaison directe eau-air. Le seul résultat mentionné concerne la position du point d'attachement et semblerait indiquer que l'analogie ne peut être que qualitative. Remarquons enfin que chacun des étages ne possédant aucun évent, aucune liaison n'existe entre l'écoulement principal et l'"atmosphère". Il s'agit donc là d'un module ne correspondant pas à la grande majorité des modules réels et nous montrerons que l'existence d'une telle liaison exige une nouvelle adaptation du modèle hydraulique.

Signalons enfin que l'analogie hydraulique est utilisée dans certains cas pour faire l'étude sur modèle air de l'écoulement hydraulique réel. Cette méthode est en particulier utilisée à l'Institut de Recherche Hydraulique de Bratislava.

Cette étude bibliographique montre l'intérêt qu'a suscité l'analogie hydraulique qui constitue un moyen souvent indispensable dans l'étude de nombreux problèmes aérodynamiques.

Il s'agit en fait, à priori, d'une méthode très facilement mise

en oeuvre, d'un coût peu élevé et qui donnerait des résultats très corrects. Remarquons cependant que chacun des expérimentateurs doit adapter cette méthode au problème qu'il veut étudier. Les écoulements internes ou externes, les régimes subsonique, transonique ou supersonique, ont chacun des conditions impératives qui doivent être réalisées au détriment d'autres caractéristiques. Il faut donc à chaque fois se placer dans les conditions adéquates. Signalons enfin que la quasi-totalité des expérimentateurs notent les difficultés expérimentales et les précautions qu'il y a lieu de prendre. Ceci est d'autant plus sensible en régime subsonique, car alors les variations du tirant d'eau sont assez faibles.

I.2. BUT DE L'ETUDE

Nous avons montré dans l'introduction que l'analogie hydraulique présente à priori un grand intérêt dans le domaine de la fluidique. Son utilisation peut alors être introduite selon deux buts différents :

- le premier est la mise au point empirique d'un module particulier. On peut alors utiliser la mise en oeuvre rapide et les méthodes de visualisation connues.
- le second est la compréhension des phénomènes d'intéraction des écoulements. Celà est nécessaire pour les hypothèses que l'on devra prendre comme base de toute étude théorique. On utilisera alors la possibilité de mesure ou de visualisation en des points particuliers des écoulements.

Ces processus seraient cependant contestables si l'analogie n'était pas une méthode valable aussi bien du point de vue quantitatif que qualitatif. Le but de notre étude est donc d'analyser le comportement d'une telle analogie lors du fonctionnement réel d'un module fluidique, aussi bien en régime statique qu'en régime dynamique. Notre étude consistera donc en la comparaison des résultats d'analogie et des mesures directes effectuées

sur un modèle "air" en similitude géomètrique avec le modèle hydraulique.

Comme nous l'a montré l'étude bibliographique, l'utilisation d'une telle analogie nécessite une adaptation au problème posé. Après donc l'exposé de l'étude théorique, nous examinerons les hypothèses retenues ainsi que les conséquences issues des relations d'analogie. L'exposé des résultats expérimentaux obtenus sera précédé d'une discussion sur la conception du modèle hydraulique le mieux adapté à l'étude proposée.

CHAPITRE II

- : -

ETUDE THEORIQUE DE L'ANALOGIE

Nous établirons les relations d'analogie par étude directe des équations générales du mouvement d'un fluide, appliquées d'une part au cas du mouvement graduellement varié d'un liquide et d'autre part à l'écoulement bidimensionnel d'un gaz compressible. Cette étude est faite dans le cas d'un écoulement subsonique, qui constitue le régime existant dans le fonctionnement de la grande majorité des modules fluidiques. Ceci nous permet, comme nous l'exposons lors de l'étude expérimentale, de considérer des tirants d'eau plus importants que ceux généralement utilisés. Notons cependant que les résultats expérimentaux obtenus par WARREN (Réf. 23) indiquent que l'analogie est plus correcte lorsqu'on étudie un régime subsonique avec un tirant d'eau plus élevé.

Nous ferons toutefois une remarque avant d'écrire les équations de chacun des écoulements considérés. La majorité des modules fluidiques fonctionnent avec des pressions d'alimentation telles que les écoulements sont turbulents, tout au moins dans les zones actives du module que sont les régions d'intéraction des écoulements. En particulier, l'effet Coanda repose sur l'entraînement turbulent du fluide ambiant par le jet principal. Cependant, et nous discuterons cette hypothèse dans le paragraphe II. 5a, nous ne considérerons que l'écoulement moyen résultant des effets turbulents et nous négligerons par conséquent les composantes turbulentes de la vitesse dans les équations.

Nous nous placerons dans le cas d'un mouvement conservatif. Les équations de base seront donc :

- l'équation de continuité qui s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0 \qquad (1)$$

- les équations dynamiques de Navier-Stokes

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} = \rho \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}}\, p + \mu \Delta \vec{U} \qquad (2)$$

dans lesquelles $\vec{F}$ représente la force extérieure qui s'applique à l'unité de masse du fluide et μ la viscosité dynamique du fluide.

Pour chacun des écoulements considérés, nous ajouterons à ces équations, des relations caractéristiques relatives à l'état et à l'évolution du fluide.

II.1. ECOULEMENT D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE AVEC SURFACE LIBRE

Cet écoulement sera défini par rapport à un plan horizontal oxy de référence, l'axe $\overrightarrow{oz}$ étant perpendiculaire à ce plan et dirigé vers le haut. La côte du fond du modèle sera donc définie par la valeur $h(x, y)$ du point considéré par rapport au plan de référence, de même que la surface libre sera définie par la valeur $H(x, y, t)$. Le tirant d'eau dans le modèle sera donc défini selon une verticale par :

$$Z(x,y,t) = H(x,y,t) - h(x,y) \qquad (3)$$

Nous supposerons que l'écoulement se fait à température constante, sans échanges de chaleur avec l'extérieur, et que la seule force extérieure agissant sur le fluide est la force de gravité.

Nous prendrons de plus comme hypothèse du mouvement graduellement varié que l'accélération verticale est négligeable devant celle de la pesanteur ainsi que toutes les dérivées de w par rapport à (x, y, z).

Les équations supplémentaires sont donc dans ce cas :

- fluide incompressible : ρ = constante (4)

$$-\vec{F} = -\vec{\text{grad}}\,(g\,z) \qquad (5)$$

$$-\frac{d\mathcal{M}}{dt} \ll g \quad \text{et} \quad \Delta w \ll g \qquad (6)$$

Ceci nous permet d'écrire à partir de la troisième des équations (2) :

$$0 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}$$

Soit, en considérant la condition limite qu'est la pression ambiante p_a qui règne au-dessus de la surface libre :

$$p - p_a = \rho g (H - z) \qquad (7)$$

relation qui exprime que la répartition des pressions est hydrostatique.

L'équation de continuité (1) peut s'écrire compte tenu de (4) :

$$\text{div}\,\vec{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Si donc nous intégrons chaque terme de cette équation sur une verticale, entre le fond et la surface libre, on obtient :

$$\int_{h(x,y)}^{H(x,y,t)} \frac{\partial u}{\partial x}\,dz + \int_{h(x,y)}^{H(x,y,t)} \frac{\partial v}{\partial y}\,dz + \int_{h(x,y)}^{H(x,y,t)} \frac{\partial w}{\partial z}\,dz = 0 \qquad (8)$$

En appliquant la règle de dérivation sous le signe $\int$ à chacun des termes du type : $\frac{\partial}{\partial x}\int_h^H u\,dz$, nous obtenons :

$$\int_h^H \frac{\partial u}{\partial x}\,dz = -u(H)\frac{\partial H}{\partial x} + u(h)\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\int_h^H u\,dz$$

$$\int_h^H \frac{\partial v}{\partial y}\,dz = -v(H)\frac{\partial H}{\partial y} + v(h)\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\int_h^H v\,dz$$

La troisième intégrale s'écrit par contre :

$$\int_h^H \frac{\partial w}{\partial z}\,dz = w(H) - w(h) = w(H)$$

car la vitesse verticale doit être nulle sur le fond.

L'équation de continuité (8) devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_h^H u\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_h^H v\,dz + u(h)\frac{\partial h}{\partial x} + v(h)\frac{\partial h}{\partial y} - u(H)\frac{\partial H}{\partial x} - v(H)\frac{\partial H}{\partial y} + w(H) = 0 \qquad (9)$$

Or :

$$w(H) = \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + u(H)\frac{\partial H}{\partial x} + v(H)\frac{\partial H}{\partial y}$$

Comme h ne dépend pas explicitement du temps, la relation (3) donne :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t}$$

L'équation (9) s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_h^H u\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_h^H v\,dz + u(h)\frac{\partial h}{\partial x} + v(h)\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \qquad (10)$$

Si l'on considère u et v comme les vitesses moyennes sur la verticale considérée, on obtient :

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uz) + \frac{\partial}{\partial y}(vz) + \left[u(h)\frac{\partial h}{\partial x} + v(h)\frac{\partial h}{\partial y}\right] = 0 \qquad (11)$$

Enfin l'introduction de (3) et (7) dans les deux premières équations (2) nous permet d'écrire :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -g\frac{\partial}{\partial x}(z+h) + \nu\Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= -g\frac{\partial}{\partial y}(z+h) + \nu\Delta v \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Les équations (11) et (12) forment donc le système d'équations du mouvement du fluide incompressible avec surface libre.

Remarque :

Si l'on considère un écoulement tel que les changements de section sont progressifs, ou bien qui n'entraînent pas de brusques variations de pression statique comme c'est en général le cas dans un module fluidique, la surface libre présente toujours une inclinaison très faible et on peut prendre comme hypothèse que l'accélération et la vitesse verticales sont nulles en tout point et à tout instant. Dans ce cas, nous pouvons écrire : $\frac{dw}{dt} = 0$, soit :

$$\frac{dH}{dt} = 0 = \frac{\partial H}{\partial t} + u\frac{\partial H}{\partial x} + v\frac{\partial H}{\partial y}$$

Or, l'équation de continuité nous permet d'écrire :

$$H\frac{\partial u}{\partial x} + H\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

ce qui nous donne :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial (uH)}{\partial x} + \frac{\partial (vH)}{\partial y} = 0$$

équation identique à (11) du fait que h ne dépend pas directement du temps et donc que $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t}$

La première méthode a toutefois l'avantage de ne rien supposer à priori sur l'allure de la surface libre.

II.2. ECOULEMENT D'UN FLUIDE COMPRESSIBLE EN CHARGE

Afin de différencier les deux systèmes d'équations, nous affecterons d'un exposant (') les variables et grandeurs caractéristiques relatives au fluide compressible.

Nous supposerons que nous avons un écoulement plan, adiabatique. Les équations se déduisent immédiatement du système (1) et (2) :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial(\rho' u')}{\partial x'} + \frac{\partial(\rho' v')}{\partial y'} = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \nu\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\right) \qquad (14)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial y'} + \nu\left(\frac{\partial v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}\right) \qquad (15)$$

A ces équations nous joindrons l'équation d'état d'un gaz parfait :

$$\frac{p'}{\rho'} = r T' \qquad (r = C_p - C_v) \qquad (16a)$$

ainsi que la loi d'évolution polytropique du gaz qui s'exprime sous la forme:

$$p' = k' \rho'^{k} \qquad (16b)$$

Remarque :

Dans le cas de l'écoulement sans frottement ni choc, l'exposant polytropique est égal au rapport des chaleurs spécifiques C_p et C_v du gaz.

Si nous nous plaçons dans le cas d'un écoulement avec frottement, il faut introduire dans l'équation intrinséque de la chaleur le terme correspondant au travail intérieur de viscosité. A condition d'admettre, comme on le fait souvent dans l'étude des machines, que ce travail peut s'exprimer sous la forme : $dW'_f = A \frac{dp'}{\rho'}$

relation dans laquelle A est une constante dont le signe dépend évidemment du fait que l'on ait soit une détente, soit une compression du gaz, on montre (réf. 26) que l'exposant polytropique est égal à :

$$k = \frac{C_p/C_v}{1 + A(C_p/C_v - 1)}$$

Enfin, nous préciserons que la hauteur des canaux du module "air" est supposée constante et égale à h'.

II. 3. DETERMINATION DES RELATIONS D'ANALOGIE

Il s'agit de comparer les systèmes d'équations (11) et (12) d'une part, et (13), (14), (15), d'autre part. La comparaison des équations de continuité montre qu'à condition d'annuler le terme entre crochets apparaissant dans (11), le tirant d'eau Z joue le même rôle que la masse volumique ρ' du gaz.

Or le terme entre crochets s'annulera :

- soit si l'on considère la condition de non-glissement à une paroi d'un fluide visqueux, ce qui entraîne, le fond étant immobile : $u(h) = v(h) \equiv 0$

- soit si le fond du modèle hydraulique est horizontal, ce qui entraîne alors : $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \equiv 0$

Dans la première hypothèse, le terme correspondant à la hauteur h (x, y) du fond ne disparaîtrait pas dans les équations dynamiques. Or l'hypothèse de base est que l'accélération verticale est négligeable devant celle de la pesanteur. La pente du canal, et donc les dérivées $\frac{\partial h}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial y}$ devront donc toujours être faibles.

Nous nous placerons donc dans le cas où le fond du canal est horizontal. Ceci n'est pas en vérité une hypothèse restrictive, mais uni-

quement une condition expérimentale qui ne doit présenter aucune difficulté dans sa réalisation.

Les équations concernant le fluide incompressible s'écrivent alors :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial (uZ)}{\partial x} + \frac{\partial (vZ)}{\partial y} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -g\frac{\partial Z}{\partial x} + \nu \Delta u \tag{18}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -g\frac{\partial Z}{\partial y} + \nu \Delta v \tag{19}$$

Nous avons donc obtenu deux systèmes d'équations analogues relatifs à deux mouvements bidimensionnels. Nous considérerons donc entre les deux modèles la similitude géomètrique dans le plan xy définie par le rapport λ :

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \lambda \tag{20}$$

Les conditions de similitude dynamique s'exprimeront donc en particulier en fonction des rapports suivants :

$$\begin{cases} \dfrac{u}{u'} = \dfrac{v}{v'} = \alpha \\ \dfrac{t}{t'} = \tau \\ \dfrac{\nu}{\nu'} = \beta \end{cases} \tag{21}$$

avec évidemment la relation : $\lambda = \alpha\tau$ (22)

L'équation (18) peut alors s'écrire :

$$\frac{\alpha}{\tau}\frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{\alpha^2}{\lambda}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'}v'\right) = -\frac{g}{\lambda}\frac{\partial Z}{\partial x'} + \frac{\beta\alpha}{\lambda^2}\nu\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}\right)$$

La comparaison de celle-ci avec l'équation (14) montre qu'il y aura analogie si l'on a :

$$\frac{\alpha}{\tau} = \frac{\alpha^2}{\lambda} = \frac{\beta\alpha}{\lambda^2} = \frac{\rho' g \dfrac{\partial Z}{\partial x'}}{\lambda \dfrac{\partial p'}{\partial x'}} \tag{23}$$

Compte tenu de (22), la première des égalités ne fournit aucune relation. La seconde peut alors s'écrire :

$$\alpha\lambda = \beta$$

soit en revenant aux variables : $\frac{u x}{\nu} = \frac{u' x'}{\nu'}$

ce qui exprime l'égalité des nombres de Reynolds des deux écoulements. C'est la première condition d'analogie.

Considérons maintenant la dernière des égalités (23) :

$$\frac{\alpha^2}{\lambda} = \frac{\rho' g}{\lambda} \frac{\frac{\partial z}{\partial x'}}{\frac{\partial p'}{\partial x'}} \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} = \frac{g}{\alpha^2} \frac{\partial z}{\partial x'}$$

Or la loi d'évolution polytropique nous donne :

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} = K' \cdot k \, \rho'^{k-1} \frac{\partial \rho'}{\partial x'}$$

et la relation précédente s'écrit alors :

$$K' \cdot k \cdot \rho'^{k-1} \frac{\partial \rho'}{\partial x'} = \frac{g}{\alpha^2} \frac{\partial z}{\partial x'}$$

qui s'intègre sous la forme :

$$K' \frac{k}{k-1} \rho'^{k-1} = \frac{g}{\alpha^2} z + \varphi(y') \qquad (24)$$

De même si l'on avait considéré les équations relatives à la deuxième composante de la vitesse, on obtiendrait la relation :

$$K' \frac{k}{k-1} \rho'^{k-1} = \frac{g}{\alpha^2} z + \psi(x') \qquad (25)$$

Il n'y aura compatibilité entre (24) et (25) que si $\varphi(y')$ et $\psi(x')$ sont des constantes pures indépendantes de x' et y'. Nous avons alors l'unique relation :

$$K' \frac{k}{k-1} \rho'^{k-1} = \frac{g}{\alpha^2} z + C_1 \qquad (26)$$

Considérons maintenant les équations de continuité (13) et (17) Leur forme nous permet de supposer qu'il existe une relation entre ρ' et Z que nous noterons : $\rho' = f(z)$

L'équation (13) s'écrit alors compte tenu de (21) :

$$\mathcal{C} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\lambda}{\alpha} \left[\frac{\partial (f u)}{\partial x} + \frac{\partial (f v)}{\partial y} \right] = 0$$

Soit : $$\mathcal{C}\frac{df}{dZ}\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{\lambda}{\alpha}f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\lambda}{\alpha}\frac{df}{dZ}\left(u\frac{\partial Z}{\partial x}+v\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=0$$

En comparant cette équation à (17), on obtient les conditions :

$$\mathcal{C}\frac{df}{dZ}=\frac{\lambda}{\alpha}\frac{f}{Z}=\frac{\lambda}{\alpha}\frac{df}{dZ}$$

qui, compte tenu de (21), nous fournissent l'unique relation :

$$\frac{f}{Z}=\frac{df}{dZ}$$

soit, après intégration : $$f=C_2Z=\varrho' \qquad (27)$$

Nous avons donc obtenu deux relations (26) et (27) entre ϱ' et Z. Nous allons chercher la condition de compatibilité. Reportons (27) dans (26) :

$$K'\frac{k}{k-1}\varrho'^{k-1}=\frac{g}{C_2\alpha^2}\varrho'+C_1$$

cette relation devant être valable quel que soit ϱ' . Ecrivons la sous la forme :

$$K'\frac{k}{k-1}\varrho'\left[\varrho'^{k-2}-\frac{k-1}{K'k}\frac{g}{C_2\alpha^2}\right]=C_1 \qquad \forall\varrho'$$

Dérivons cette relation par rapport à ϱ' :

$$K'k\left[\varrho'^{k-2}-\frac{1}{K'k}\frac{g}{C_2\alpha^2}\right]=0 \qquad \forall\varrho'$$

Ceci sera vérifié si l'on a :

$$\left\{\begin{array}{l} k=2 \\ \dfrac{g}{K'kC_2\alpha^2}=1 \end{array}\right. \qquad (28)$$

ce qui donne pour C_2 : $$C_2=\frac{g}{2K'\alpha^2}$$

En définitive la relation entre ϱ' et Z sera :

$$\varrho'=\frac{g}{2K'\alpha^2}.Z \qquad (29)$$

qui montre que le rapport $\frac{Z}{\varrho'}$ est un invariant dans l'analogie, la hauteur de liquide Z et la masse volumique ϱ' du gaz étant les grandeurs homologues. Nous noterons :

$$\vartheta=\frac{Z}{\varrho'} \qquad (30)$$

Cette étude nous a donc permis :

- de mettre en évidence l'invariant θ de l'analogie
- de retrouver la valeur de l'exposant polytropique du "gaz hydraulique"
- d'obtenir la condition concernant l'égalité des nombres de Reynolds des deux écoulements ainsi que celle des nombres de Froude et de Mach.

La relation (19) peut en effet s'écrire, compte tenu de (16), (21) et (28) :

$$\rho' = \frac{g}{2\,\frac{P'}{\rho'^2}\left(\frac{u}{u'}\right)^2} \cdot Z$$

soit :

$$\frac{u}{\sqrt{gZ}} = \frac{u'}{\sqrt{2\,P'/\rho'}} \qquad (31)$$

Il reste enfin à définir les conditions aux limites qui interviendront dans les valeurs des différentes constantes que nous avons rencontrées. Ce seront les conditions de réservoir (infini amont - indice 0) et les conditions d'ambiance (infini aval - indice ∞), notre but étant l'étude des performances des modules. Il est évident que dans le cas de l'étude du fonctionnement dans une zone déterminée du module pourront intervenir les conditions provenant d'un écoulement secondaire.

L'analogie pourra alors s'exprimer par les relations suivantes :

$$\left(\frac{P'}{P'_\infty}\right)^{1/2} = \frac{\rho'}{\rho'_\infty} = \frac{T'}{T'_\infty} = \frac{Z}{Z_\infty} \qquad (32)$$

II.4. EXPRESSION DES RESULTATS - RELATIONS D'UTILISATION

L'analogie n'est donc possible qu'entre l'écoulement d'un fluide incompressible à surface libre et celui d'un fluide compressible ayant un exposant polytropique égal à 2.

Il y aura alors analogie des deux écoulements si l'on a :

- similitude géomètrique dans le plan xy
- égalité des nombres de Froude et de Mach
- égalité des nombres de Reynolds.

Le rapport $\frac{Z}{\varrho'}$ entre le tirant d'eau... et la masse volumique du gaz est un invariant. Appliqué à l'infini aval, nous avons :

$$\theta = \frac{Z_\infty}{\varrho'_\infty}$$

Cette valeur sera une valeur de base puisque l'on connaîtra toujours à priori les conditions ambiantes de fonctionnement des deux modèles. Nous exprimerons donc toutes les quantités en fonction de θ .

Les relations d'utilisation seront alors :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{P'}{P'_\infty} = \left(\frac{\varrho'}{\varrho'_\infty}\right)^2 = \left(\frac{Z}{Z_\infty}\right)^2 \qquad (33) \\ \alpha^2 = \frac{\gamma\theta}{2K'} \qquad (34) \end{array} \right.$$

avec $\theta = \frac{Z}{\varrho'} = \frac{Z_\infty}{\varrho'_\infty}$ et $K' = \frac{P'}{\varrho'^2} = \frac{P'_\infty}{\varrho'^2_\infty}$ (35)

Enfin le rapport q_m des débits massiques sera :

$$q_m = \frac{\Omega_m}{\Omega'_m} = \frac{\varrho}{\varrho'} \alpha \lambda \frac{Z}{h'} \qquad (36)$$

h' étant la hauteur constante des canaux du modèle "gaz".

Les caractéristiques d'un module fluidique étant en général exprimées en considérant les pressions relatives, nous écrirons la relation (33) sous une autre forme, et nous obtenons le système définitif des relations d'analogie :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{P' - P'_\infty}{P'_\infty} = \left(\frac{Z}{Z_\infty}\right)^2 - 1 \qquad (37) \\ \alpha^2 = \left(\frac{u}{u'}\right)^2 = \frac{\gamma\theta}{2K'} \qquad (34) \\ q_m = \frac{\varrho}{h'} \alpha \lambda \theta \qquad (36) \end{array} \right.$$

avec - $\vartheta = \frac{Z}{\rho'} = \frac{Z_\infty}{\rho'_\infty}$

- $K' = \frac{P'}{\rho'^2} = \frac{P'_\infty}{\rho'^2_\infty}$

- ρ : masse volumique du liquide
- h' : hauteur des canaux du modèle "gaz"
- q_m : rapport des débits massiques des deux écoulements.

Si par exemple nous supposons connu le modèle "gaz" (nature du gaz et conditions ambiantes) et si nous prenons l'eau comme liquide expérimental, une seule variable est imposée parmi α, λ, ϑ et β : c'est le rapport β des viscosités cinématiques. Comme on a deux relations : égalité des nombres de Reynolds d'une part, et des nombres de Mach et de Froude d'autre part, il reste un paramètre libre. En général nous choisirons ϑ . Dans le cas où l'on ne tiendra pas compte de la condition sur les nombres de Reynolds, nous aurons un degré de liberté supplémentaire et nous pourrons choisir les deux paramètres ϑ et λ .

II. 5. CRITIQUE DES HYPOTHESES

Nous analyserons successivement les hypothèses concernant les composantes turbulentes de la vitesse, la composante verticale de la vitesse dans le modèle à surface libre et l'écoulement plan dans le modèle en charge. Cette analyse tiendra compte du but de notre étude qui est l'étude des modules fluidiques, car, comme l'a montré l'étude bibliographique, l'analogie doit être adaptée à chaque cas particulier.

a) - Composantes turbulentes de la vitesse

Nous n'avons considéré dans les équations que les valeurs moyennes des composantes de la vitesse. Or, comme nous l'avons signalé au début de ce chapitre, une catégorie de modules fluidiques utilisent le phénomène d'attachement d'un jet à une paroi (effet Coanda). Des études concernant ce phénomène aux faibles nombres de Reynolds (réf. 27) nous

ont montré que l'écoulement dissymétrique se produit lorsque le nombre de Reynolds du jet est supérieur à une valeur critique qui est de l'ordre de 30. Cette valeur correspond approximativement à la valeur critique obtenue dans les études de stabilité hydrodynamique des jets. De plus, nous avons montré que les caractéristiques de ce phénomène demeurent pratiquement constantes lorsque le nombre de Reynolds est supérieur à une valeur qui dépend de la géomètrie de la zone d'attachement, mais qui reste toujours voisine de 2 000 à 3 000.

Ainsi, nous justifierons notre hypothèse concernant les vitesses turbulentes par les deux faits suivants :

- les deux écoulements considérés sont en pratique turbulents. La figure 1, extraite de la réf. (27) montre qu'alors les caractéristiques de l'attachement sont tout à fait comparables lorsqu'on utilise un modèle à surface libre ou un modèle en charge.

- l'analogie impose, si l'on tient compte de la viscosité des fluides, l'égalité des nombres de Reynolds. Nous verrons cependant que cette condition est difficilement réalisable en pratique. Il est alors important que la stabilité des caractéristiques des écoulements soit atteinte pour des nombres de Reynolds très inférieurs à ceux existant dans les écoulements. Ceci a été vérifié par nos précédentes études (réf. 27).

b) - Composante verticale de la vitesse dans le modèle à surface libre

L'importance de cette hypothèse est directement liée à deux faits qui seront examinés dans les prochains paragraphes, à savoir l'influence de la valeur du tirant d'eau et l'existence d'un écoulement tridimensionnel. Nous noterons que, d'une part la pente de la surface libre sera toujours très faible, et que d'autre part malgré la tridimensionnalité des deux écou-

lements, leur comparaison en tant que bidimensionnels est correcte globalement.

En conséquence, il sera important d'éviter qu'en un point du modèle il y ait une variation brutale du niveau du liquide, c'est-à-dire qu'il ne faudra pas qu'il existe un ressaut hydraulique. Les hypothèses concernant la composante verticale de la vitesse seront donc correctes, à condition qu'en tout point le tirant d'eau soit tel que $Z > Z_c$, Z_c étant défini par $Z_c^3 = \frac{q^2}{g}$ (q : débit volumique par unité de largeur). Il faudra donc respecter en tout point : nombre de Mach = nombre de Froude < 1.

Remarquons qu'en particulier au niveau de la sortie de la buse principale, la pression statique varie très peu malgré l'élargissement brusque. Elle présente en fait une variation inférieure à quelques pour-cents de la pression dynamique (réf. 28). Il n'y a donc pas de variations brusques du tirant d'eau dans cette zone.

c) - Ecoulement plan dans le modèle en charge

C'est une hypothèse généralement adoptée dans le traitement théorique de l'écoulement dans les modules fluidiques. Ceci sera d'autant plus valable que le rapport de forme (rapport de la hauteur des canaux à leur largeur) sera grand. Cependant, certaines zones comme le rouleau de recirculation consécutif à l'attachement du jet, seront toujours fortement tridimensionnelles. Cette hypothèse n'est en fait justifiée que par l'expérience. De nombreuses études ont en effet montré qu'en considérant des caractéristiques relatives à un écoulement bidimensionnel, la comparaison des résultats obtenus sur les deux modèles est toujours correcte. Ceci est d'autant plus vérifié que les variations de tirant d'eau sur le modèle hydraulique sont faibles par rapport à la valeur absolue de celui-ci.

Dans nos essais, ce rapport sera toujours inférieur à 1/10, cette dernière valeur n'étant obtenue que pour des valeurs très importantes du

débit telles qu'on approcherait l'écoulement sonique dans la buse d'alimentation.

II.6. VALIDITE ET UTILISATION DE L'ANALOGIE HYDRAULIQUE

Nous analyserons dans ce paragraphe la réalité physique des conditions théoriques d'existence de l'analogie et de leur réalisation pratique.

a) - Influence de la valeur de l'exposant polytropique

La valeur théorique $k = 2$ a été longtemps considérée comme une difficulté majeure dans l'utilisation de l'analogie. De nombreuses expériences ont cependant montré que son influence est moins déterminante.

Nos propres expériences ont montré que les résultats obtenus à partir de l'analogie sont plus proches des courbes théoriques correspondant à $k = 1,4$ (air) qu'à $k = 2$ (gaz hydraulique). C'est donc un fait favorable à l'utilisation de l'analogie lorsque le fluide compressible est l'air.

Reprenons la valeur de l'exposant polytropique correspondant à l'écoulement adiabatique avec frottements d'un gaz parfait (réf. 26) :

$$k = \frac{C_p/C_v}{1 + A\left(\frac{C_p}{C_v} - 1\right)}$$

Pour une détente du gaz (ce qui est le cas dans les modules fluidiques) la constante A est positive. La valeur de k est alors inférieure à C_p/C_v et si l'on considère le gaz hydraulique pour lequel $C_p/C_v = 2$, son exposant polytropique est inférieur à 2 lorsqu'on tient compte des frottements.

Les courbes expérimentales correspondront donc à des courbes théoriques d'un fluide parfait de rapport $\frac{C_p}{C_v}$ inférieur à celui du gaz considéré.

b) - Influence de la valeur de la profondeur de liquide

L'influence de ce paramètre a retenu l'attention de tous les expérimentateurs. Lorsqu'il s'agit d'étudier des phénomènes d'ondes, on a montré que la hauteur de liquide optimum est de l'ordre de 6 à 7 mm. C'est effectivement la valeur maximum qui donne une vitesse de propagation indépendante de la longueur d'onde. Or, c'est là une nécessité dans l'étude de propagations d'ondes car dans un gaz toutes les ondes se propagent avec la même célérité. Pour un écoulement à surface libre, on montre que la vitesse de propagation d'une onde de longueur d'onde λ_o dans un liquide de tension superficielle A_o est :

$$C=\sqrt{\left(\frac{g\lambda_o}{2\pi}+\frac{2\pi A_o}{\rho\lambda_o}\right)\text{th}\left(2\pi\frac{Z}{\lambda_o}\right)}$$

Ce résultat est représenté sur la figure 2. Or, l'analogue de la célérité du son est la vitesse de groupe : $\left(c-\lambda_o\frac{dc}{d\lambda_o}\right)$ car elle représente le transfert de l'énergie. L'analogie ne sera donc correcte que lorsque $\frac{dc}{d\lambda_o}=0$, c'est à dire pour un tirant d'eau très faible.

Cependant, ceci intervient très peu lorsqu'on considère des écoulements subsoniques. Les ondes de capillarité dont la célérité est égale à $\sqrt{\frac{2\pi A_o}{\rho\lambda_o}}$ n'interviennent alors que dans la difficulté de mesure, c'est-à-dire qu'elles créent du "bruit" sur la valeur du tirant d'eau. Par contre, le fait de pouvoir prendre un tirant d'eau plus important améliore la précision des mesures en diminuant l'influence de phénomènes parasites. En particulier, dans le cas d'un Z faible, la couche limite existant sur le fond du modèle devient très importante. Dans ce cas, on ne pourra la supprimer qu'en déplaçant la maquette dans un fluide initialement au repos (réf. 12), méthode qui entraîne de grosses difficultés de mesure et de visualisation, et qui est inconcevable dans le cadre de nos travaux. En prenant une nappe d'eau plus épaisse, on minimise l'importance relative de la couche limite du fond et de la modification du profil des vitesses près de la surface libre. On obtiendra le même effet en ce qui concerne

les couches limites latérales en prenant des échelles de similitude géométrique λ les plus grandes possibles. Les valeurs de λ que nous avons utilisées sont comprises entre 30 et 50, et les tirants d'eau entre 5 et 10 cm.

c) - Influence de la valeur du nombre de Reynolds des écoulements

L'égalité entre les nombres de Reynolds des deux écoulements est l'une des conditions d'analogie, égalité qui se traduit par la relation $\alpha\lambda=\beta$ entre les rapports $\alpha=\frac{\mu}{\mu'}$, $\lambda\ \frac{x}{x'}$ et $\beta=\frac{\nu}{\nu'}$

Or, à moins que d'effectuer les études dans une salle climatisée et pressurisée, avec le gaz et le liquide, les températures de ceux-ci étant maintenues à la température ambiante, les quantités α , λ , et β dépendent de la température. Si nous considérons λ constant (ce qui est pratiquement obligatoire pour une série d'expériences), il faudrait donc que α et β aient des variations compensées. Or, du fait que la viscosité d'un gaz varie dans le même sens que la température, alors que celle d'un liquide diminue lorsque la température augmente, β est rapidement décroissant avec une augmentation de la température. Or, si l'on prend Z_∞ constant, α varie d'après l'expression (34) comme $\sqrt{\rho'}$ et donc comme $\sqrt{\frac{1}{T}}$ approximativement.

Il faudrait donc pour que la relation $\alpha\lambda=\beta$ soit vérifiée, quelle que soit la température, que Z_∞ varie selon une loi fonction des valeurs μ (T) μ' (T) ρ (T) et ρ' (T). En fait, il faudrait que Z_∞ diminue très rapidement lorsque T augmente. Cette solution n'est pas réalisable en pratique et nous admettrons dans l'application de l'analogie que l'égalité des nombres de Reynolds n'est pas une condition nécessaire. A l'appui de cette nouvelle hypothèse, nous pouvons remarquer :

- d'une part que dans les écoulements considérés, les forces d'inertie sont très supérieures aux forces de viscosité,
- d'autre part que la gamme des nombres de Reynolds dans

laquelle fonctionnent les modules est telle que les caractéristiques des phénomènes de base sont alors indépendantes de ce nombre.

- enfin que le fait de ne pas respecter rigoureusement cette condition nous permet de conserver deux paramètres libres, Z_∞ et λ ce qui est très important du point de vue expérimental.

d) - Influence de la nature des parois

Il s'agit là d'un paramètre qui est en général passé sous silence. Or, elle intervient de deux façons :

- d'une part par la planéité du fond du modèle qui est comme nous l'avons vu une condition d'analogie $\left(\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = 0\right)$
  Or, lorsqu'on prend de faibles tirants d'eau, les défauts de planéité interviennent non seulement en eux-mêmes, mais aussi dans leur influence sur le développement des couches limites, on diminue cette influence en prenant Z_∞ plus grand, mais nous nous sommes toutefois attachés à ce que les variations de la cote de la dalle soient inférieures à quelques dixièmes de millimètres malgré la surface de dalle considérée.

- d'autre part par la rugosité des parois des canaux, aussi bien du fond du modèle que des parois latérales. Ce paramètre est difficile à définir car en fait ce n'est pas l'échelle géométrique de l'aspérité qui intervient, mais un coefficient appelé "rugosité effective" qui est fonction de la hauteur et de la forme des aspérités. Nous nous sommes attachés en premier lieu à supprimer ce paramètre en construisant un modèle hydraulique à parois lisses, la hauteur des aspérités ne suivant donc pas l'échelle de similitude géométrique.

CHAPITRE III

- : -

ETUDE EXPERIMENTALE

L'étude expérimentale que nous présentons consiste en une vérification de la validité de l'analogie théorique que nous venons de définir. Elle consistera donc en la comparaison des résultats obtenus sur "table à surface libre" avec application des relations d'analogie, et des résultats obtenus par mesure directe sur des modules fonctionnant avec l'air.

Les relations d'analogie font intervenir la pression et la température par la masse volumique du gaz. Nous avons choisi de calculer toutes les quantités dans les conditions moyennes des essais, à savoir : pour une pression ambiante de 760 mm de mercure, soit 101 324,7 Pascal et une température de 20°C, soit une masse volumique de l'air ρ'_∞ = 1,207kg/m3.

Enfin, en ce qui concerne le calage des déversoirs, la cote Z_∞ considérée sera la cote réelle de l'arête déversante corrigée de la hauteur du ménisque qui se forme sur cette arête.

III,1. CONCEPTION GENERALE DES "TABLES A SURFACE LIBRE"

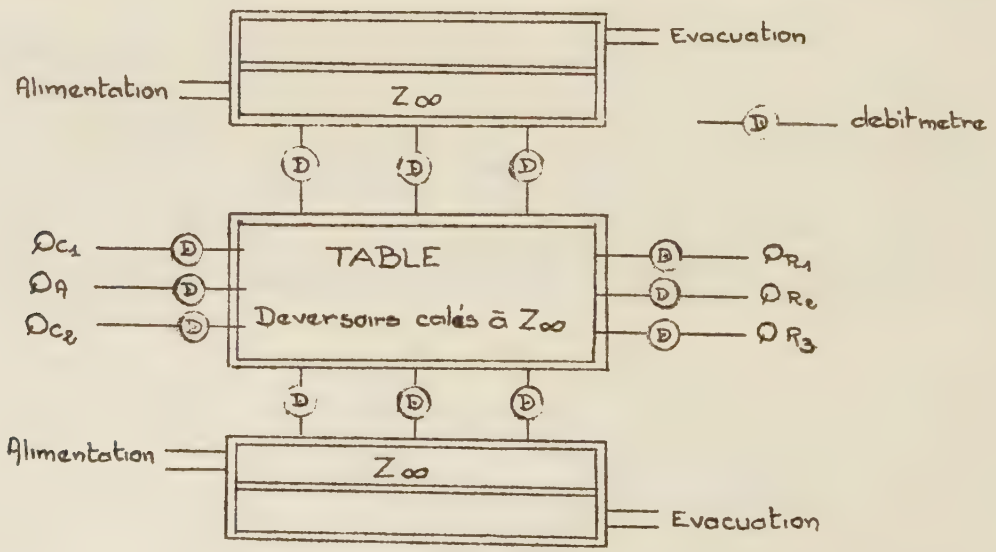
Afin d'atteindre le but que nous nous proposons, il faut réaliser les conditions géomètriques, les conditions d'écoulement et les conditions ambiantes.

Les conditions de similitude géomètrique ne présentent pas de caractère particulier : il est facile de réaliser des gabarits avec la précision nécessaire. Seul peut se poser le problème de la rugosité des parois. Nous nous sommes attachés pour l'instant à diminuer celle-ci afin d'écarter son influence sur les performances des modules. La rugosité fera l'objet

d'une étude particulière.

Les conditions d'écoulement sont en général faciles à réaliser si l'on tient compte des remarques faites précédemment concernant la condition d'égalité des nombres de Reynolds. Il suffit alors de posséder autant d'alimentations indépendantes en fluide qu'il y aura d'entrées à alimenter. Celà ne poserait que des problèmes de topologie dans le cas de systèmes fluidiques comportant plusieurs modules.

Les conditions ambiantes méritent une attention particulière. Ayant écarté le problème de la température ambiante (paragraphe II. 6. c) il reste à simuler correctement la pression ambiante. Ce niveau de pression correspond à une certaine cote de calage qui est l'un des paramètres que l'on peut choisir puisque nous avons deux degrés de liberté. Cependant l'étude du fonctionnement global d'un module montre que dans les différents canaux (de commande, de sortie ou évents) qui, lors de l'étude d'un seul module, débouchent à l'atmosphère, les pressions peuvent être, suivant l'état de fonctionnement du module, supérieures, égales ou inférieures à la pression ambiante. Il peut donc s'établir dans ces canaux des écoulements de sens opposés selon l'état de fonctionnement. En particulier, il existe des débits aspirés de l'atmosphère ambiante vers le module. Il faut donc que sur la table à surface libre, ces débits puissent également s'établir dans les deux sens. Nous pouvons donc schématiser la table de la façon suivante :



Les deux alimentations latérales devront toujours être surabondantes par rapport aux débits maxima pouvant être aspirés dans le module.

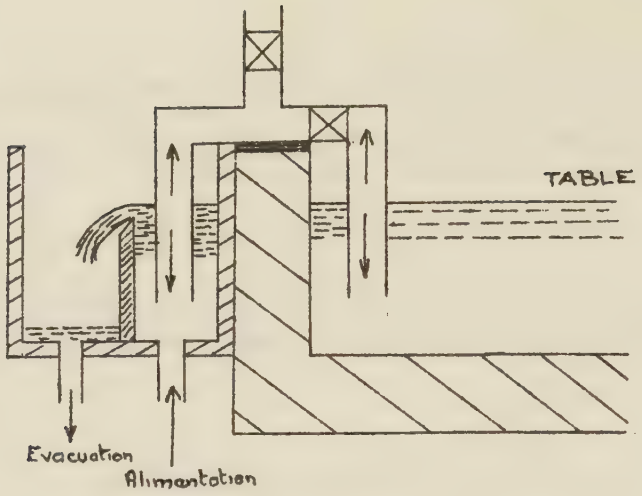
III. 2. DESCRIPTION DES INSTALLATIONS ET DES METHODES DE MESURE

a) - Description des installations

Notons de suite que pour des raisons de commodité évidentes, le fluide utilisé est l'eau. Seules certaines expériences réalisées précédemment et que nous rappellerons brièvement ont été faites en utilisant un mélange eau-Pluracol V 10 afin d'obtenir des viscosités cinématiques plus importantes.

Les deux tables à eau que nous avons utilisées, dénommées T_1 et T_4, sont constituées d'une dalle en béton armé recouverte d'une chappe lissée. La figure 3 qui donne les cotes en mm des divers points vérifiés pour la table T_4 montre que cette technique permet d'obtenir une très bonne planéité.

Les figures 4 et 5 montrent des vues de chacune des installations Les tirants d'eau sur les dalles sont réglés au moyen d'arêtes déversantes de hauteur réglable, qui constituent en particulier la quasi totalité du pourtour de la dalle T_4. L'impératif de possibilité d'écoulement dans les deux sens, ajouté à la nécessité de pouvoir mesurer tous les débits d'entrée ou de sortie, nous a amenés à munir chaque entrée et sortie de siphons. Ceux-ci fonctionnent entre la dalle et des récipients à niveau constant accolés à la table. La cote des déversoirs y est fixé à la même valeur que celle des déversoirs de la table. La valeur du tirant d'eau dans le canal considéré détermine donc le sens de l'écoulement dans le siphon.



Il y a donc possibilité lorsque la zone considérée est en dépression par rapport à la pression ambiante, d'avoir un apport de débit de l'extérieur vers cette zone. Enfin, étant donné la loi de débit d'un déversoir à mince paroi :

$$Q = m L h \sqrt{2gh}$$

Nous voyons que la charge h sera d'autant plus faible pour un débit donné que la longueur de déversement sera grande. Or, pour bien simuler le niveau de pression constante à l'aval quel que soit le débit, il faut que la charge h correspondant au débit maximum soit négligeable vis à vis des différences de hauteur d'eau observées sur le modèle. On réalisera cette condition par une grande longueur de déversement et une fuite directe réglable utilisée pour les forts débits.

Les alimentations sont constituées de colonnes dont chacune comprend deux diaphragmes en parallèle permettant d'obtenir une bonne précision dans toute la gamme des débits.

Les récepteurs et les évents du module déversent dans des canaux munis de déversoirs à arête triangulaire.

Les différents modules étudiés sur table à eau sont réalisés en ciment directement lissé (T_4) ou revêtus de lucoflex (T_1). Cette méthode est facilement mise en oeuvre et permet d'obtenir une bonne stabilité propre de chacun des éléments ainsi que des parois très lisses.

Les maquettes "air" correspondantes sont réalisées soit par photogravure (Dycril), soit par usinage d'Altuglas (fig. 6 et 7).

b) - Méthodes de mesure et de visualisation

(Bien que certaines des méthodes ci-dessous ne soient pas directement liées à l'étude quantitative de l'analogie hydraulique, nous les citerons car elles correspondent à l'utilisation directe des tables à eau). La mesure des débits d'eau a été effectuée avec des diaphragmes étalonnés pour les alimentations et des canaux munis de déversoirs triangulaires pour les sorties et les évents. Les débits aspirés seront obtenus directement par pesée. Pour l'air, nous avons utilisé des débitmètres à flotteur dont les indications ont été corrigées en fonction de la pression aval de l'appareil, par une formule de la forme :

$$Q_{réel} = Q_{lu}\left(\alpha \Delta P + \beta\right)$$

obtenue par étalonnage préalable.

La mesure des tirants d'eau a été effectuée dans le cas de plans d'eau stables au moyen de pointes limnimètriques munies de repères. Ceux-ci sont visés avec un cathétomètre dont la précision de lecture est de $\pm$ 0,02 mm. En fait l'incertitude sur Z et Z_∞ est de l'ordre de 0,1 mm, ce qui, compte tenu de la relation d'analogie :

$$P' - P'_\infty = \frac{P'_\infty}{Z_\infty^2}\left(Z^2 - Z_\infty^2\right)$$

donne :

$$\frac{\Delta(P'-P'_\infty)}{P'-P'_\infty} = 2\left[\frac{\Delta Z_\infty}{Z_\infty} + \frac{Z\Delta Z + Z_\infty \Delta Z_\infty}{Z^2 - Z_\infty^2}\right]$$

soit avec $\Delta P'_\infty = 0$, $Z_\infty = 5$ cm et $Z = 5,5$ cm (équivalent à 200 mb) une incertitude relative sur $(P'-P'_\infty)$ de l'ordre de 4 %.

Dans le cas de l'étude en fonctionnement dynamique du module, nous avons utilisé des jauges électriques à résistance variable en fonction de l'enfoncement (fig. 4). Celà permet d'obtenir les variations du plan d'eau sur un enregistreur à U.V équipé de boucles dont le temps

de réponse convient largement pour les études proposées. Les mesures de pression sur les maquettes "air" ont été faites soit avec des manomètres à liquide, soit avec des capteurs montés directement sur les modules (fig. 8).

En ce qui concerne la visualisation des écoulements à surface libre, nous avons utilisé trois méthodes :

- lorsque le fond de la table est transparent, on peut y disposer un système de raies alternativement blanches et noires. On fait ainsi apparaître les déformations de la surface libre (fig. 9).
- on peut déposer des particules légères (sciure, confetti) sur la surface libre (fig. 10).
- on peut introduire de l'huile de lubrification dans l'eau d'alimentation et disposer des filets colorés dans la zone à visualiser (fig. 11).

III. 3. PREMIERS RESULTATS OBTENUS SUR TABLE A EAU

Nous rappellerons brièvement les résultats que nous avons obtenus lors des premières études effectuées sur table à eau concernant des phénomènes de base (réf. 27). Cette expérimentation effectuée sur la table T_2 (fig. 12) concerne d'une part l'attachement d'un jet à une paroi, et d'autre part les oscillations d'un jet en présence d'un partiteur.

Nous avons montré qu'un jet plan débouchant dans une chambre à surface libre présentait le même comportement qu'un jet d'air, tant en ce qui concerne son "fonctionnement statique" que son "fonctionnement dynamique".

La figure 1, extraite de la réf. (27), est un exemple de cette analogie : tant que le nombre de Reynolds du jet est assez grand, les longueurs du rouleau de recirculation existant lors de l'attachement, se

retrouvent sur la table à eau, tout comme d'ailleurs l'influence sur ce paramètre des conditions géométriques (fig. 13).

Toutefois les essais effectués aux faibles nombres de Reynolds obtenus grâce à un mélange eau-Pluracol V 10 montrent qu'alors les caractéristiques du rouleau varient très rapidement avec le régime d'écoulement du jet (fig. 14).

De même les régimes d'oscillations obtenus lorsqu'on place un partiteur face au jet et à la distance x_p , et dont la figure 15 est une représentation, sont tels que :

- du point de vue qualitatif, l'analogie avec le phénomène "d'edge-tone" obtenuedans l'air, est évidente. En particulier on observe les mêmes sauts brusques de fréquence avec les paliers successifs.
- quantitativement, les rapports δ des fréquences obtenus de part et d'autre d'un saut sont comparables à ceux obtenus dans l'air.
- enfin la variation, pour un saut de fréquence donné, de l'abscisse x_{pc} du partiteur en fonction de la vitesse initiale du jet, est représentée par une loi linéaire (fig. 16).

III.4. ETUDE EXPERIMENTALE DE L'ANALOGIE HYDRAULIQUE : COMPORTEMENT STATIQUE

L'étude expérimentale de l'application de l'analogie à la fluidique a été réalisée sur deux modules de principes de fonctionnement différents afin d'étendre le domaine de comparaison. Ces deux modules sont d'une part une bascule monostable dont la géométrie est due à la Société BERTIN et une bascule bistable à attachement de jet à la paroi.

a) - Utilisation de la bascule monostable

L'installation expérimentale est montrée sur la figure 5. Le module de comparaison a été réalisé par photogravure sur du Dycril (matériau qui polymérise sous l'action des rayons U.V - fig. 7). La similitude géométrique dans le plan x.y a été réalisée avec un rapport λ égal à 50. L'ensemble des arêtes déversantes du modèle hydraulique étaient calées à la cote Z_∞ = 59 mm par rapport à la cote du fond du modèle prise au centre de la buse du jet principal.

Nous avons tracé la caractéristique d'alimentation des modèles "eau" et "air", caractéristiques représentées respectivement sur les figures 17 et 18. Ces courbes expérimentales sont, dans la gamme des débits considérés, bien représentées respectivement par les relations :

$$\left(Z_o - Z_\infty\right)_m = 1550\ Q^{1,71}_{(m^3/s)} \qquad (41)$$

$$\left(P'_o - P'_\infty\right)_{Pa} = 17{,}6 \cdot 10^{10}\ Q'^{1,82}_{m\,(kg/s)} \qquad (42)$$

Soit en unités courantes :

$$\left(Z_o - Z_\infty\right)_{mm} = 11{,}5\ Q^{1,71}_{(l/s)} \qquad (43)$$

$$\left(P'_o - P'_\infty\right)_{mb} = 6260\ Q'^{1,82}_{m\,(gr/s)} \qquad (44)$$

Nous remarquons que les lois pression-débit sont telles que les exposants intervenant dans ces relations sont très voisins. Celà confirme l'analogie qualitative entre les deux écoulements et donne une loi de pertes pratiquement identique.

Considérons la relation d'analogie (37) :

$$\frac{P'_o - P'_\infty}{P'_\infty} = \frac{Z_o^2 - Z_\infty^2}{Z_\infty^2} \qquad (37)$$

A partir de (41) on obtient :

$$Z_o + Z_\infty = 1550\, Q^{1,71} + 2 Z_\infty \qquad (45)$$

La combinaison des relations (37), (41) et (45) nous donne alors :

$$\frac{P'_o - P'_\infty}{P'_\infty} = \frac{1550\, Q^{1,71}}{Z_\infty} \left(\frac{1550\, Q^{1,71}}{Z_\infty} + 2 \right)$$

Soit, en introduisant le rapport q_m des débits massiques :

$$\frac{P'_o - P'_\infty}{P'_\infty} = \frac{1550}{Z_\infty} \left(\frac{q_m}{\rho} \right)^{1,71} \left(Q'^{1,71}_m \right) \left[\frac{1550}{Z_\infty} \left(\frac{q_m}{\rho} \right)^{1,71} \left(Q'^{1,71}_m \right) + 2 \right] \qquad (46)$$

Cette expression comporte, si on la développe, un terme en $Q'^{1,71}$ et un terme en $Q'^{3,42}$. Pour évaluer l'influence de ce dernier, nous avons représenté le rapport A entre les deux termes, en fonction du débit et de la cote de calage du déversoir.

$$A = \frac{1550}{Z_\infty} \; \frac{(q_m/\rho)^{1,71}\, Q'^{1,71}_m}{2} = \frac{775}{Z_\infty}\, Q^{1,71}$$

Soit en unités courantes : $A = 5{,}75 \; \dfrac{Q^{1,71}_{(l/s)}}{Z_{\infty (mm)}}$

A représente donc en pourcentage, le terme en $Q^{3,42}$ qui s'ajoute au terme $Q^{1,71}$. Les variations de A en fonction de Q et Z_∞ sont représentées sur la figure 19. Ces courbes montrent que A est d'autant plus important que Z_∞ est petit. Or, étant donné la loi (42), l'analogie sera d'autant plus correcte que A sera petit. Remarquons toutefois que le terme en $Q^{3,42}$ peut corriger favorablement le terme en $Q^{1,71}$. Nous constatons ainsi que le fait de prendre un tirant d'eau important est avantageux dans l'étude subsonique d'un module fluidique.

Etablissons maintenant la comparaison des mesures expérimentales. En tenant compte des caractéristiques du modèle "air", (en particulier h' = 1 mm), les différents rapports d'analogie prennent les valeurs :

$$\left[\begin{array}{ll} \lambda = 50 & \mathcal{C} = 26\,930 \\ \alpha = 0{,}00186 & q_m = 4\,540 \end{array} \right.$$

On obtient ainsi à partir des caractéristiques des figures 17 et 18 les résultats exprimés sur la figure 20. Nous constatons une très bonne

concordance entre les mesures directes et les résultats de l'analogie.

b) - Utilisation de la bascule bistable

L'installation expérimentale est montrée sur la figure 4, tandis que la figure 6 est une photographie des quatre maquettes air utilisées. Ces dernières, dénommées MI, MIIA, MIIIA et MIVA, sont telles que les rapports de similitude géomètrique λ sont respectivement 10,70 ; 14,50 ; 21,4 et 30,75.

Les essais hydrauliques ont été réalisés avec deux valeurs du tirant d'eau aval, Z_∞ prenant successivement les valeurs de 7,31 cm et 8,57 cm, et sont reportés sur la figure 21 (caractéristique d'alimentation).

Les différentes variables de l'analogie sont, selon la maquette, les valeurs suivantes, pour Z_∞ = 7,31 cm :

MI	λ = 10,7	h' = 10 mm	q_m = 134	$\mathcal{C}$ = 5175
MIIA	λ = 14,5	h' = 7,5mm	q_m = 241,5	$\mathcal{C}$ = 7000
MIIIA	λ = 21,4	h' = 5 mm	q_m = 535,5	$\mathcal{C}$ = 10350
MIVA	λ = 30,75	h' = 3,33mm	q_m = 1156	$\mathcal{C}$ = 14880

Les résultats appliqués à chacune des maquettes sont représentés sur les figures 22 à 25.

Nous constatons :

- d'une part que l'analogie est plus ou moins correcte selon la maquette considérée
- d'autre part que la pression dans le récepteur obtenue par analogie est bien supérieure à la valeur réelle.

En ce qui concerne ce dernier point, ce sont les conditions expérimentales qui sont en défaut. En effet, pour des raisons d'encombrement, il a été impossible d'avoir une longueur de déversement suffisante pour les débits qui traversaient le modèle.

Quant aux différences obtenues selon la maquette, il faut remarquer que les relations d'analogie ont été obtenues en supposant implicitement que la similitude est valable lorsqu'on considère des modèles de même type, en similitude géométrique. En particulier, ce devrait être vérifié pour les quatre maquettes air que nous avons utilisées. Or, des études récentes (réf. 29) ont montré que cette condition n'est pas respectée même pour l'écoulement dans une buse débouchant à l'atmosphère.

Il est bon alors de considérer les débits par unité de section Q'_m/A, et de comparer les caractéristiques obtenues avec celles de l'analogie (fig. 26). Nous avons aussi tracé les courbes théoriques obtenues à partir de la formule de Saint-Venant pour un gaz en écoulement isentropique :

$$U'^2 = \frac{2k}{k-1} \frac{P'_0}{\rho'_0} \left[1 - \left(\frac{P'_\infty}{P'_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]$$

Le débit massique par unité de section est donc :

$$\frac{Q'_m}{A} = \frac{2k}{k-1} \rho'^2_\infty \frac{P'_0}{\rho'_0} \left[1 - \left(\frac{P'_\infty}{P'_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]$$

Or :

$$\frac{P'_0}{\rho'^k_0} = \frac{P'_\infty}{\rho'^k_\infty} \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{\rho'_0} = \frac{1}{\rho'_\infty} \left(\frac{P'_\infty}{P'_0} \right)^{1/k}$$

Donc :

$$\frac{Q'_m}{A} = \frac{2k}{k-1} \rho'_\infty P'_0 \left(\frac{P'_\infty}{P'_0} \right)^{1/k} \left[1 - \left(\frac{P'_\infty}{P'_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]$$

Les courbes CT1 et CT2 représentent cette relation respectivement pour k = 1,4 et k = 2.

Nous constatons :

- que la courbe déduite des mesures hydrauliques se situe correctement parmi les mesures directes, et que le fait que les maquettes air ne respectent pas une similitude basée sur la similitude géométrique, donne des variations supérieures à celles qui existent entre la courbe analogue et les courbes "air".

- que la courbe analogue correspondrait à une valeur de k inférieure à 1, 4 dans la formule théorique ci-dessus. Celà est conforme avec le fait que l'introduction des frottements dans les lois d'écoulement amène à considérer pour une détente, une valeur de l'exposant polytropique inférieur à l'exposant du gaz considéré (réf. 26).

III. 5. ETUDE EXPERIMENTALE DE L'ANALOGIE HYDRAULIQUE : COMPORTEMENT DYNAMIQUE

Afin d'étudier le comportement dynamique d'un module, il faut choisir un phénomène caractéristique. Le plus évident paraît être la réponse en fréquence obtenue par l'analyse harmonique. Celle-ci consiste à exciter l'entrée par un signal sinusoïdal d'amplitude connue et de fréquence variable, et à comparer les signaux de sortie et d'entrée. Cependant cela exigerait la mise au point du système d'excitation dans le cadre des tables à eau. On pourrait aussi étudier les temps de basculement. Dans ce cas l'étude sur table à eau serait facilement réalisable avec des jauges à résistance variable et des jauges tout ou rien. Les mesures seraient plus délicates avec les modules air puisque les temps mesurés seraient de l'ordre de la milliseconde.

Il est préférable d'utiliser un phénomène dynamique global. L'observation directe sur table à eau de la bascule bistable a montré que dans certaines conditions de débits, il s'établit un régime oscillatoire entretenu sans bouclage extérieur de la sortie sur l'entrée. Cette oscillation dont la période est de l'ordre de 30 secondes, provient de la sensibilisation du jet principal par les jets latéraux. Ce mode de fonctionnement se rencontre dans certains circuits.

On est en effet quelquefois amené à polariser certains modules (amplificateurs proportionnels, OU-NI, bascules, ...) afin de les maintenir

initialement dans un état stable donné. Lorsque le jet de commande existe le jet principal se trouve alors soumis à l'action de deux jets de sens opposés. Ainsi toute perturbation sur l'un des jets est amplifiée par les autres et l'on constate très souvent que le module devient instable. En introduisant un phénomène de capacité, on peut obtenir une oscillation stable. Dans ce but nous avons obturé les évents de la bascule et enregistré les oscillations obtenues.

Pour les mesures hydrauliques, les signaux donnés par les jauges à résistance variable ont été enregistrés sur un appareil à rayons UV. La figure 27 montre des enregistrements effectués pour les deux récepteurs avec différents couples de valeur (Q_D, Q_G).

Pour les essais "air" le signal du capteur a été envoyé sur un oscilloscope étalonné dont on a photographié l'écran (fig. 28).

Les essais effectués sur table à eau ont montré :

- que la fréquence est maximum lorsque les deux débits latéraux sont égaux (fig. 29)
- que ce maximum de fréquence dépend alors des valeurs du débit d'alimentation et des débits latéraux ($Q_D = Q_G$).

Si nous maintenons $Q_D = Q_G$, la variation de la fréquence en fonction de cette valeur commune est représentée sur la figure 30, résultats obtenus avec $Z_\infty = 7,2$ cm et des débits principaux Q_A respectivement de 1,26 l/s pour A1, 1,01 l/s pour A2 et 0,795 l/s pour A3.

Le rapport des temps est égal pour ces essais à 5180.

La figure 31 montre la comparaison des mesures directes "air" (φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4) et des courbes d'analogie (A1, A2, A3).

Nous constatons que bien que le rapport des temps soit supérieur à 5000, les courbes A se placent correctement parmi les courbes φ car la figure 32 montre que la variation de f'max est linéaire en fonction du débit principal Q'_A.

CHAPITRE IV

- : -

CONCLUSIONS

Les résultats expérimentaux que nous avons obtenus montrent l'intérêt que peut présenter l'étude d'un module fluidique sur une table à surface libre. En effet, la validité de l'analogie, tant au point de vue du fonctionnement statique que du fonctionnement dynamique, est vérifiée avec des écarts compatibles avec les études des modules fluidiques. En effet, les écoulements considérés sont en général complexes, et de ce fait les performances sont très sensibles non seulement aux caractéristiques géomètriques et d'écoulement, mais aussi aux dimensions absolues des modules (non respect de la similitude géomètrique). La précision obtenue par l'analogie hydraulique est donc satisfaisante.

Mais ce qui est important, c'est le fait que cette méthode d'étude permet une approche qualitative très commode dont les résultats sont très profitables du fait que les lois quantitatives sont également vérifiées. Toute observation sur table à eau peut donc être appliquée directement aux modèles en charge.

Il faut toutefois signaler, quant à la conception des tables à eau, l'importance et la nécessité de simuler correctement la pression ambiante et de permettre des écoulements de sens opposés dans tous les canaux. Dans ces conditions l'analogie permet :

- de part les dimensions des modèles, d'installer des sondes de mesure sans perturber totalement l'écoulement.
- de part l'existence de la surface libre, d'utiliser des méthodes de visualisation facilement mises en oeuvre et efficaces.
- enfin, de part le mode de fabrication des modèles, d'effectuer des études qualitatives sur les performances qui permettent une adaptation rapide des formes au fonctionnement et aux performances souhaités.

REFERENCES

1. ISAACHSEN, I,

"Innere Vorgänge in strömenden Flüssigkeiten und Gasen"
Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure
Bd 55 - pp 428-431 (Mars 1911)

2. JOUGUET, E,

"Quelques problèmes d'hydrodynamique générale"
Journal de Mathématiques pures et appliquées
Série 8 Vol. 3 pp 1-63 (1920)

3. RIABOUCHINSKY, D,

"Sur l'analogie hydraulique des mouvements d'un fluide compressible"
Compte-rendu de l'Acadèmie des Sciences - Paris
Vol. 195 (1932) et Vol. 199 (1934)

4. WORONETZ, C,

"Sur quelques applications de la méthode de l'analogie hydraulique"
Publ. Scient. et Techn. du Ministère de l'Air -
N° 144 (1939)

5. PREISWERK, E,

"Application of the method of gas dynamics to water flows with free surface"
Parts. I et II NACA - Tech. Memos - 934 et 935
(Mars 1940)

6. ORLIN, W.J, LINDNER, N.J, et PITTERLY, J.G

"Application of the Analogy between water flow with a free surface and two-dimensional compressible gas flow"
NACA - Tech. Note n° 1185 (février 1947)

7. FLOWERS, J.V,

"The Development of experimental techniques for the study of compressible flows by the hydraulic Analogy"
Thèse - Université de Californie (1948)

8. SHAPIRO, A.H,

"An appraisal of the hydraulic analogy to gas dynamics"
Meteor report n° 34 - M.I.T. (avril 1949)

9. SUPINO, G,

"La similitudine Aria-Acqua a lo studio dei modelli idraulici"
Energia Elettrica (Milano) Vol. 28 n° 11 (nov. 1951)

10. LAITONE, E.V,

"A study of transonic gas dynamics by the hydraulic analogy"
Journal of the Aeronautical Sciences (Avril 1952)

11. HARLEMAN, D.R.F, et IPPEN, A.T,

"The range of application of the Hydraulic Analogy in transonic and supersonic aerodynamics"
Publ. Scient. et Techn. du Ministère de l'Air - Mémoires sur la Mécanique des Fluides - pp. 91-112 (1954)

12. LAITONE, E.V,

"Developments in gas dynamics by the Hydraulic Analogy"
Publ. Scient. et Techn. du Ministère de l'Air - Mémoires sur la Mécanique des Fluides - pp. 203-217 (1954)

13. BRYANT, R.A.A,

"Use of hydraulic analogy for inside problems"
Journal of the Aerospace Sciences - Vol. 25 n° 8
p. 536 (Août 1958)

14. BRYANT, R.A.A,

"The hydraulic analogy for external flows"
Journal of the Aerospace Sciences - Vol. 27 n° 2
pp. 148-149 (fév. 1960)

15. LAITONE, E.V,

"The limitations of the hydraulic analogy"
Journal of the Aerospace Sciences - Vol. 28 n° 8
p. 656 (Août 1961)

16. BRYANT, R.A.A,

"Comments on limitations of the hydraulic analogy"
Journal of the Aerospace Sciences - p. 622 (Mai 1962)

17. HOYT, J.W,

"A study of supersonic jet deflection by the hydraulic analogy"
Ph. D. Thesis - Université de Californie - Los Angeles
(Janvier 1962)

18. DYMENT, A, et GONTIER, G,

"Influence de la viscosité et de la capillarité sur les expériences d'analogie entre les écoulements avec surface libre et les écoulements d'un gaz"
Journal de Mécanique - Vol. I n° 3 pp. 255-291 (sept. 1962)

19. KLEIN, E.J,

"Interaction of a shock-wave and a wedge : an application of the Hydraulic Analogy"
A.I.A.A. Journal vol. 3 n° 5 (mai 1965)

20. STEWARTSON, K,

"Correlated incompressible and compressible boundary layers"
Proceedings of the Royal Society of London - Séries A
vol. 200 (1949)

21. VAN LE, N,

"Transformation between compressible and incompressible boundary - layer équations"
Journal of Aeronautical Sciences vol. 20 pp. 583-584 (1953)

22. FIEBIG

"Corresponding compressible and incompressible jets and wakes"

6e congrés Aéronautique Européen - Munich (1965)

23. WARREN, C.H,

"Application of the hydraulic analogy to internal subsonic flow"

Army Missile Command - Redstone Arsenal - ALABAMA

Report n° AG-TR-67-19 (Juillet 1967

24. BYRD, J.L, et WILLIAMS, J.G,

"Static pressure distribution along an inclined setback plate with attached jet using the hydraulic analogy"

Army Missile Command - Redstone Arsenal - ALABAMA

Report n° RG-TR-63-15 (Août 1963)

25. BARCLAY, R.G,

"Use of the hydraulic analogy in the study of fluid interaction devices"

Harry Diamond Laboratories - AD 405-867 Washington D.C (Avril 1963)

26. BRUN, E, MARTINOT-LAGARDE, A,

"Mécanique des fluides"

Tome 1 - Ed. Dunod - Paris 1960

27. FONADE, C.

"Contribution à l'étude d'un jet en milieu confiné"

Thèse de Doctorat de Spécialité - Université de Toulouse

Institut de Mécanique des Fluides - (1967)

28. FLORENT

"Etude analogique et expérimentale des zones non-établies des jets subsoniques"

Thèse de Doctorat - Université de Poitiers (1966)

29. VIRTO, L.

"Contribution à l'étude de la similitude dans les amplificateurs fluidiques à recollement turbulent"
Thèse d'Université - Faculté des Sciences de Toulouse
(1969)

DEUXIEME PARTIE

ETUDE DE LA STABILITE ET DE LA DYNAMIQUE

DES JETS PLANS

NOTATIONS (IIème partie)

a : Coefficient caractéristique du profil des vitesses du jet ($a = 0,09$)

f : Fréquence

J : Quantité de mouvement du jet par unité d'épaisseur (J_{oo} : quantité de mouvement initiale)

K_o : Quantité de mouvement du jet par unité d'épaisseur et de largeur

l_s : Largeur initiale du jet

p : Pression statique

Δp : Différence de pression de part et d'autre du jet

Q_m : Débit volumique moyen dans la section X

q_m : Débit volumique moyen adimensionnel ($q_m = Q_m/U_s.l_s$)

q_E : Débit adimensionnel entraîné par les tourbillons

q_{IE} : Débit adimensionnel entraîné (sol. de GOERTLER)

R : Rayon de courbure de l'axe du jet

r : Rayon d'un tourbillon

S : Nombre de STROUHAL $\left(S = \frac{f.l_s}{U_s} \right)$

$\vec{U}$: Vecteur vitesse moyenne

$\vec{U}'$: Vecteur vitesse de perturbation

U_s : Vitesse dans le noyau potentiel

o,x,y : axes de référence

X,Y : Coordonnées adimensionnelles (par rapport à l_s)

X_c : Abscisse critique (stabilité neutre)

X_N : Longueur du noyau potentiel

X_T : Abscisse de formation des tourbillons

Z : Coordonnée adimensionnelle définie à partir de X et Y

α_1 : Nombre d'onde $\left(\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_1} \right)$ et $\alpha = \alpha_1 . l_s$

α (ch.VI) : Coefficient de pression

$\delta(z)$: Fonction de DIRAC

λ_1 : Longueur d'onde de la perturbation $(\lambda_1 = \lambda \ell_s)$

η' : Coordonnée adimensionnelle

ρ : Masse volumique

ν : Coefficient de viscosité dynamique

$\xi(z)$: Fonction déduite de $\phi(y)$

Ψ : Fonction courant

φ : Fonction amplitude de la perturbation $(\varphi = \phi . U_s \ell_s)$

$\mathcal{T}$: Période des tourbillons

ω_n : Pulsation propre du jet

$$\Phi' = \frac{d\Phi}{dy}$$

$$\xi' = \frac{d\xi}{dz}$$

CHAPITRE I

- : -

INTRODUCTION ET BUT DE L'ETUDE

Les études de la configuration et des caractéristiques d'un écoulement de fluide réel, doué en particulier d'un certain coefficient de viscosité, font apparaître, dans la plupart des cas, l'existence de zones de mélange. On peut citer en particulier le sillage derrière un obstacle dans le cadre des écoulements externes et les rouleaux de recirculation formés lors de l'élargissement brusque d'une veine, pour les écoulements internes. De très nombreuses études ont permis de connaître les caractéristiques moyennes dans de telles zones. Les conséquences déduites des études théoriques, aussi bien que les mesures expérimentales, ont mis en évidence de nouveaux paramètres ainsi que des phénomènes secondaires se superposant à l'écoulement principal. Parmi les premiers, nous retiendrons l'entraînement par un jet du fluide ambiant initialement au repos, auquel nous associerons la formation de tourbillons aux frontières des zones de mélange. L'entraînement est dû soit à la viscosité du fluide, soit à la turbulence, selon le nombre de Reynolds de l'écoulement. Les tourbillons sont eux une représentation de l'instabilité des limites d'une zone de mélange. Ces deux phénomènes sont en fait liés, comme nous le montrerons, et ont trouvé une application récente dans la fluidique.

I.1. LA STABILITE ET LA DYNAMIQUE DES JETS EN FLUIDIQUE

Parmi les nombreuses possibilités de classification des modules, nous choisirons de distinguer très simplement les éléments de puissance qui ont un rôle d'amplificateur, des capteurs qui détectent et mesurent un signal bien défini.

La conception des premiers est en général basée sur la commande d'un jet dit "de puissance" ou "d'alimentation" par un écoulement secondaire. Le niveau d'énergie de ce dernier est très inférieur à celui du jet principal. L'une des caractéristiques d'un tel élément est alors le gain, relatif à la pression ou au débit. Le jet de puissance doit donc correspondre à un état, c'est-à-dire une position bien définie, tout en restant cependant très sensible au signal de commande envisagé. On retrouve ainsi

le dilemne stabilité, précision commun à tous les systèmes. La sensibilisation du jet de puissance doit s'exercer dans la région initiale du jet, c'est-à-dire à l'aval immédiat de la buse. Or cette région est précisément une zone de transition constituée par un noyau potentiel à vitesse constante entouré de deux zones de mélange. Si le jet est initialement laminaire, il devient turbulent à une distance de l'ordre de quelques fois la largeur de la buse. S'il est déjà turbulent dans celle-ci, il le demeure évidemment mais son profil des vitesses subit dans cette région de profondes et rapides modifications. Il est donc intéressant de connaître comment évolue l'écoulement dans cette région de transition pour adapter un système de commande susceptible de profiter des caractéristiques du jet dans cette zone. On peut par exemple utiliser les ondes sonores comme signaux de commande (réf. 1, 2, 3). Il s'agit alors de l'excitation forcée du jet à une fréquence donnée. Par contre, la commande classique par un jet latéral du même fluide que le jet de puissance utilise les caractéristiques d'entraînement du jet. Le phénomène d'attachement d'un jet à une paroi ou à un autre jet, ou effet Coanda, est à la base de la plupart des éléments logiques fluidiques. Les études que nous avons réalisées (réf. 4) ont montré les faits suivants :

- l'attachement ne se produit que si le nombre de Reynolds $\mathcal{R}ls$ est supérieur à une valeur critique de l'ordre de 30 à 40.
- les caractéristiques de l'écoulement varient alors très rapidement. C'est une zone de transition.
- lorsqu'on atteint une valeur de l'ordre de 3 000 à 4 000, l'attachement devient indépendant de $\mathcal{R}ls$. On a un régime turbulent établi.

Dans cette gamme de nombres de Reynolds compris entre quelques centaines et quelques milliers, l'attachement dépend très largement de l'écoulement amont. Or, compte-tenu des précautions qu'il faut prendre pour obtenir le régime laminaire, et de la recherche d'un minimum de consommation de fluide, on est souvent amené à utiliser les modu-

les dans cette gamme de nombres de Reynolds. Le jet de commande agissant alors comme compensateur du fluide entraîné, la connaissance de l'écoulement dans la zone de transition est nécessaire si l'on veut optimiser la commande (réf. 5).

En ce qui concerne les capteurs, certains, dont en particulier les capteurs de température ou de rapport de pressions absolues, utilisent le phénomène d'oscillations d'un jet débouchant face à une arête. On a dans ce cas un phénomène global dans lequel il est difficile de dissocier l'influence des valeurs locales des paramètres de l'écoulement (vitesses, pressions) de celle du comportement d'ensemble du jet. Ce phénomène est connu comme le principe des "tuyaux d'orgue", car les fréquences d'oscillations obtenues avec l'air appartiennent au domaine des fréquences audibles.

I.2. BUTS DE L'ETUDE

Nous sommes donc en présence de deux phénomènes à priori différents : l'un concerne les caractéristiques ponctuelles du fluide et aboutit à l'entraînement du fluide ambiant et à la formation des tourbillons ; l'autre concerne l'intégralité de la masse fluide constituant le jet et se traduit par l'oscillation de celui-ci autour du partiteur.

Le fait que chacun d'eux apparaisse dans des géomètries d'écoulement très différentes a amené les chercheurs à étudier séparément chacun de ces phénomènes. En particulier, la stabilité d'un jet dans la zone de transition peut apparaître comme un cas particulier de l'étude générale des couches limites. Ainsi très peu d'études ont considéré l'ensemble de ces phénomènes et l'existence même des tourbillons est contestée par certains. Pourtant, dès 1936, M. E. CRAUSSE (réf. 7) présente des visualisations de l'écoulement dans le sillage d'un cylindre qui font apparaître très clairement cette existence. Notons déjà que ces tourbillons se forment indépendamment des tourbillons alternés qui apparaissent à la fin du sillage, tout comme la figure 100 montre qu'ils se

forment même lorsque le jet oscille globalement autour du partiteur.

En 1967, MARTINEZ(réf. 5) étudie expérimentalement les relations qui peuvent exister entre les tourbillons et le paramètre d'entraînement du jet.

Nous nous proposons, pour notre part, d'étudier la formation même des tourbillons et leurs caractéristiques par l'étude de la stabilité du jet dans la région initiale et de montrer comment à partir de ces résultats on peut envisager le problème de l'oscillation globale du jet autour du partiteur.

Les nombres de Reynolds existant lors des phénomènes de transition étant toujours très faibles, la plupart des expérimentateurs ont considéré des jets dont le profil des vitesses, indépendant de l'abscisse, est celui d'un jet plan laminaire. Or, en général, les modules fluidiques sont conçus de telle sorte que le jet possède initialement un profil des vitesses uniforme, avec cependant, et selon le régime, des couches limites initiales plus ou moins importantes. C'est d'un tel jet que nous traiterons dans le prochain chapitre. Nous ferons ainsi intervenir l'évolution du profil des vitesses selon le sens de l'écoulement et une interprétation des résultats nous permettra de mettre en évidence les caractéristiques des tourbillons.

Du point de vue expérimental, nous considérons un jet d'eau débouchant dans une chambre à surface libre. En effet, les études de CRAUSSE concernant les tourbillons secondaires ont montré que la similitude de Reynolds peut leur être appliquée.

Nos propres travaux sur l'application de l'analogie hydraulique ont abouti au fait que cette même condition sur le nombre de Reynolds est applicable entre un écoulement en charge et un écoulement présentant une surface libre. Dans ces conditions, en particulier le nombre de Strouhal défini par la relation

$$S = \frac{f\, l_s}{U_s}$$

f étant la fréquence de formation de tourbillons, reste invariant et nous pouvons utiliser un modèle présentant une surface libre.

CHAPITRE II

- : -

ETUDE DES CARACTERISTIQUES DU JET

Nous considérons un jet plan à profil initial uniforme de largeur l_s et de vitesse U_s qui s'épanouit dans un milieu indéfini. Les études théoriques, autant qu'expérimentales, d'un tel jet sont nombreuses mais donnent en général des définitions analytiques du profil des vitesses très mal adaptées à des développements théoriques. Nous avons donc choisi de prendre une relation qui soit suffisamment simple pour être d'une utilisation commode, mais qui d'autre part représente correctement les profils expérimentaux, en particulier au voisinage du point d'inflexion du profil qui est particulièrement significatif dans le cadre de cette étude.

La figure 33 présente les principales notations adoptées pour le jet.

II.1. PROFILS DES VITESSES DU JET

La région initiale du jet comporte donc un noyau potentiel à vitesse constante U_s entourée de deux couches de mélange. Nous considérerons l'une de celles-ci. Le profil des vitesses se développe alors de telle façon que l'on puisse le représenter quelle que soit la section considérée par un profil unique, fonction de la coordonnée adimensionnelle η'. La figure 35, extraite de la référence 6, donne le profil expérimental classique. Nous avons choisi une approximation de ce profil telle que :

- elle se présente sous une forme analytique simple,
- elle représente bien le profil réel au voisinage du point d'inflexion.

Ceci nous a amené à considérer une solution asymptotique, et nous avons choisi :

$$\frac{u}{U_s} = 0{,}5\left[1 + th\,(1{,}14\,\eta' + 0{,}43)\right] \qquad (47)$$

Cette solution est valable pour $y \geq 0$ car le fait qu'elle soit asymptotique ne nous permet pas de couvrir les valeurs de y de $-\infty$ à $+\infty$.

η' est la coordonnée adimensionnelle définie par $\eta' = \frac{y'}{a\,x'}$

a étant la constante donnée par ABRAMOVICH : $a = 0,09$. Nous avons ainsi

$$\begin{cases} \frac{u}{U_s} = 1 & \text{pour} \quad \eta' = +\infty \\ \frac{u}{U_s} = 0 & \text{pour} \quad \eta' = -\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{u}{U_s} = 0,7 & \text{pour} \quad \eta' = 0 \\ \frac{u}{U_s} = 0,5 & \text{pour} \quad \eta' = 0,377 \end{cases}$$

En choisissant comme nouvelle origine l'axe de la buse 0 et en considérant les coordonnées adimensionnelles X et Y définies par :

$$X = x/l_0 \qquad Y = y/l_0$$

nous obtenons :

$$\eta' = \frac{0,5 - Y}{aX} = \frac{0,5}{aX} - \eta$$

Nous prendrons enfin comme nouvelle variable, Z défini par :

$$Z = 1,14\,\eta' + 0,43 = \frac{0,57 - 1,14\,Y}{aX} + 0,43 \qquad (48)$$

(valable pour $Y \geq 0$)

Nous noterons Z_0 la valeur de Z pour laquelle $Y = 0$:

$$Z_0 = \frac{0,57}{aX} + 0,43$$

Le profil des vitesses s'écrit alors :

$$\frac{u}{U_s} = 0,5\,(1 + \text{th}\,Z) \qquad (49)$$

La figure 36 donne les différents profils obtenus à partir de (49) pour des abscisses inférieurs à cinq fois la largeur de la buse. Cette

dernière valeur est en effet voisine de la valeur généralement admise comme longueur du noyau potentiel.

Cherchons les caractéristiques d'un tel jet au point d'inflexion du profil. Compte tenu de (48) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_s}{l_s^2}\left(-\frac{1,14}{aX}\right)^2 \frac{d^2(u/U_s)}{dz^2}$$

Donc au point d'inflexion, $d^2(u/U_s)/dz^2 = 0$

soit avec (49) : $Z = 0$ ou $Z = \pm\infty$

Seule la première solution représente le point cherché et nous avons donc au point d'inflexion :

$$\begin{cases} Z = 0 & \text{soit } Y = 0,5 + 0,034X \\ \dfrac{u}{U_s} = 0,5 \end{cases} \qquad (50)$$

II.2. CALCUL DE L'EPAISSEUR DE QUANTITE DE MOUVEMENT

Cette dimension, caractéristique d'une zone de mélange, est définie par :

$$\textcircled{H} = \int_0^{+\infty} \frac{u}{U_s}\left(1 - \frac{u}{U_s}\right) dy$$

Soit, en la rendant adimensionnelle par la largeur l_s de la buse :

$$\theta = \frac{\textcircled{H}}{l_s} = \int_0^{+\infty} \frac{u}{U_s}\left(1 - \frac{u}{U_s}\right) dY \qquad (51)$$

Compte tenu des relations (49) et (50) et après intégration, on obtient :

$$\theta = \frac{0,25\,a}{1,14} X\left(1+th z_0\right) \qquad (52)$$

La figure 37 donne la variation $\theta(X)$. Pour X inférieur à 1,5 , soit z_0 supérieur à 4, nous avons :

$$\theta \# 0,0395 X$$

Cette épaisseur de quantité de mouvement nous permettra de comparer les résultats obtenus avec des jets présentant une couche limite initiale. C'est là une méthode courante qui s'applique en particulier aux études de stabilité, et SATO (réf. 8) a montré que cette dimension peut caractériser le jet lors des études dynamiques.

II. 3. CALCUL DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT DU JET

C'est l'une des caractéristiques importantes du jet pour son comportement dynamique, aussi bien dans la zone intiale que dans la zone du jet établi. Elle est en effet significative de la "raideur" et intervient par conséquent tant du point de vue courbure et déviation que de celui des fréquences d'oscillation.

Nous appellerons :

- J_{oo} la quantité de mouvement initiale du jet, par unité d'épaisseur : $J_{oo} = \rho U_s^2 l_s$
- J_1 la quantité de mouvement dans la section x de la portion de jet comprise entre $y = -y_1$ et $y = +y_1$

$$J_1 = \int_{-y_1}^{y_1} \rho u^2 dy$$

- K_o la quantité de mouvement par unité de largeur, dans la section x : $K_o = \frac{J_1}{2y_1}$
- K_{oo} la valeur de K_o pour $x = 0$

a) - Région initiale du jet

Le profil des vitesses est alors donné par la relation (49)

$$\frac{u}{U_s} = 0{,}5(1+\text{th}\, z) \qquad (49)$$

$$z = \frac{0{,}57 - 1{,}14\,Y}{aX} + 0{,}43 \qquad (48)$$

Donc : $$J_1 = 2\int_0^{y_1} \rho u^2 dy = -2\left(\frac{aX}{1{,}14}\right)\rho U_s^2 l_s \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{u}{U_s}\right)^2 dz$$

z_1 étant la valeur correspondante à y_1

Après intégration, on obtient :

$$J_1 = \frac{aX}{2{,}28}\rho U_s^2 l_s \left[2(z_0 - z_1) - (\text{th}\, z_0 - \text{th}\, z_1) + \text{Log}\left(\frac{\text{ch}^2 z_0}{\text{ch}^2 z_1}\right)\right] \qquad (53)$$

avec :

$$\begin{cases} z_0 = \dfrac{0{,}57}{aX} + 0{,}43 \\ z_1 = \dfrac{0{,}57 - 1{,}14\,Y_1}{aX} + 0{,}43 \end{cases} \qquad (54)$$

Lorsque $X \longrightarrow 0$ par valeurs positives :

$$\text{ch}\, z_0 \sim \frac{e^{z_0}}{2} \qquad \text{ch}\, z_1 \sim \begin{cases} e^{z_1/2} & \text{si } z_1 \longrightarrow +\infty \\ e^{-z_1/2} & \text{si } z_1 \longrightarrow -\infty \end{cases}$$

On obtient ainsi :

Pour $X \longrightarrow 0$ et $z_1 \longrightarrow +\infty$ $(Y_1 < 0{,}5)$

$$J_1 = 2Y_1 \rho U_s^2 l_s$$

Pour : $X \longrightarrow 0$ et $z_1 \longrightarrow -\infty$ $(Y_1 > 0{,}5)$

$$J_1 = \rho U_s^2 l_s$$

J_1 est donc proportionnel à Y_1 tant que $0<Y_1<0,5$ et reste ensuite égale à la quantité de mouvement intiale du jet J_{oo} .

La relation (53) nous donne donc :

$$\frac{K_o l_s}{J_{oo}} = \frac{aX}{4,56 Y_1}\left[2(Z_o - Z_1) - (th Z_o - th Z_1) + Log\left(\frac{ch^2 Z_o}{ch^2 Z_1}\right)\right] \quad (55)$$

et

$$\frac{K_{oo} l_s}{J_{oo}} = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0<Y_1<0,5 \\ \dfrac{1}{2Y_1} & \text{pour } Y_1>0,5 \end{cases} \quad (56)$$

La figure 38 donne les variations $\frac{K_o l_s}{J_{oo}}(X)$ pour différentes valeurs de Y_1

b) - Région du jet établi

Nous prendrons dans cette région le profil classique défini par :

$$\begin{cases} \dfrac{u}{u_m} = 1 - th^2 \xi \\ u_m(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\dfrac{J_{oo}}{\rho}}\sqrt{\dfrac{\sigma}{x-x_o}} \\ \xi = \sigma \dfrac{y}{x-x_o} \end{cases} \quad (57)$$

avec $\sigma = 7,67$ et $x_o = -1,25\, l_s$ (correspondant à une longueur de noyau potentiel de $4,5\, l_s$).

Soit ξ_1 la valeur de ξ pour $Y = Y_1$: $\xi_1 = \sigma \frac{Y_1}{x-x_o}$

La quantité de mouvement est obtenue par intégration :

$$J_1/J_{oo} = \frac{3}{2} th \xi_1 \left(1 - \frac{th^2 \xi_1}{3}\right) \quad (58)$$

Soit :

$$\begin{cases} \dfrac{K_0 l_0}{J_{00}} = \dfrac{3}{4 Y_1} \operatorname{th} \xi_1 \left(1 - \dfrac{\operatorname{th}^2 \xi_1}{3}\right) \\ \xi_1 = 7{,}67 \dfrac{Y_1}{X + 1{,}25} \end{cases} \qquad (59)$$

La figure 39 donne les variations $\dfrac{K_0 l_0}{J_{00}}(X)$ pour différentes valeurs de Y_1 .

Nous constatons que pour $Y_1 \geqslant 0{,}5$, la relation (59) représente bien la quantité de mouvement du jet quel que soit X.

CHAPITRE III

- : -

ETUDE THEORIQUE DE L'ECOULEMENT DANS UN JET LIBRE

AU VOISINAGE DU NOYAU POTENTIEL

Nous considérons l'écoulement provoqué dans la région du noyau potentiel par un jet de profil initial uniforme, débouchant dans un milieu indéfini , constitué du même fluide. Nous pouvons distinguer dans cette région deux écoulements distincts : la partie centrale ou noyau potentiel dans lequel la vitesse reste constante et égale à U_s et qui n'est pas perturbée ; les deux zones extérieures, ou zones de mélange dans lesquelles la déformation continue du profil est la conséquence de l'entraînement du fluide ambiant.

Or, les études expérimentales ont montré que les zones de transition sont caractérisées par des intensités de fluctuations de vitesse importantes. Nous citerons par exemple les expériences de SATO (réf. 9) sur la zone de mélange entre un écoulement semi infini à vitesse constante et le fluide ambiant initialement immobile. Il est donc intéressant de connaître à quoi correspondent ces fluctuations. C'est le premier but que nous nous sommes proposés.

III.1. ETUDE QUALITATIVE DE L'ECOULEMENT

Dès la sortie de la buse, le jet transmet une partie de son énergie au fluide ambiant. Ce transfert s'effectue dans les deux zones de mélange et si l'on ne considère que le voisinage de la buse (c'est-à-dire pour une abscisse inférieure à 4 ou 5 fois la largeur initiale du jet), tout se passe comme si les deux zones étaient indépendantes. Le noyau central qui est une région non perturbée empêche toute perturbation, issue de l'une des zones de mélange, de réagir sur l'autre. Ceci est vérifié expérimentalement non seulement par l'étude des profils de vitesse, mais par les visualisations de l'écoulement. Il s'agit donc de savoir si ce transfert d'énergie s'effectue par un processus continu dans toute la masse du fluide ou bien selon un processus discret. Dans le cas d'un processus continu, on pourrait définir des paramètres caractéristiques ne subissant que des variations lentes et continues, tels par exemple la "longueur de mélange" définie par PRANDTL. Par contre, dans le cas d'un processus discret,

le transfert serait effectué par des phénomènes que l'on pourrait isoler dans l'espace, tels par exemple des rues de tourbillons. Bien que l'existence de ces tourbillons dans les zones de mélange d'un jet soit contestée les expériences de CRAUSSE (réf. 7) et MARTINEZ (réf. 5), aussi bien que nos propres travaux , nous permettent, dans la limite de nos conditions expérimentales, d'affirmer que dans les zones de mélange entourant le noyau potentiel, l'écoulement est formé d'une suite de tourbillons. La figure 40 est l'une des nombreuses visualisations que nous avons réalisées.

Nous pouvons ainsi distinguer trois zones dans l'écoulement :

- Zone I : les lignes de courant restent pratiquement parallèles. L'entraînement du fluide ambiant se fait selon un processus continu, mais les visualisations montrent que dans cette zone le transfert d'énergie est faible. L'étude faite dans la réf. 5 montre de même que la variation du débit entraîné lorsqu'on se déplace vers l'aval, subit une discontinuité pour une distance inférieure à la largeur de la buse. Nous verrons dans le chapitre suivant qu'effectivement la zone I se termine au voisinage de 0,5 à 0,7 l_s.
  Dans cette zone l'écoulement présente les caractéristiques continues.
- Zone II : il y a formation de tourbillons qui se développent en se déplaçant vers l'aval. L'énergie accumulée au départ, qui apparaît lors de l'enroulement très rapide du tourbillon, est dégradée ensuite par viscosité et transmise à une quantité de fluide de plus en plus importante. En fait, on constate que les enveloppes apparentes de l'ensemble des tourbillons correspondent d'une part à la limite du noyau potentiel, d'autre part à la limite extérieure du jet. Cette zone se termine donc lorsque deux tourbillons, appartenant chacun à l'une des zones de mélange, se rejoignent.
- Zone III : les deux zones de mélange n'en forment alors plus qu'une, et le processus discret disparaît rapidement pour aboutir à un

processus continu. Celui-ci sera alors caractérisé par le profil classique des vitesses dans la région de jet établie.

La conclusion concernant la longueur du noyau potentiel que nous avons donnée ci-dessus, suppose évidemment qu'il y ait deux tourbillons, appartenant chacun à l'une des zones de mélange, qui soient situés à la même abscisse x, c'est-à-dire que les deux rues de tourbillons sont symétriques par rapport à l'axe de la buse. Or, si nous considérons un tel écoulement en fluide parfait (réf. 10) les deux seules solutions possibles sont, soit des tourbillons symétriques, soit des tourbillons alternés. On montre d'ailleurs que la configuration symétrique est instable et que la seconde n'est stable que si le rapport entre la largeur de la rue et la distance entre deux tourbillons consécutifs est égal à une valeur bien définie. Or, on constate que d'une part la configuration symétrique existe et est prépondérante sur la solution des tourbillons alternés, et que d'autre part la distance entre deux tourbillons consécutifs est variable avec l'abscisse. Celà est dû, pour la première différence, au fait que les deux rues ne réagissent pas l'une sur l'autre, et pour la seconde que la viscosité permet la dissipation de l'énergie du tourbillon.

Nous venons de dire que la configuration prépondérante est celle des tourbillons symétriques. En fait la géomètrie de l'écoulement varie entre les deux solutions. La formation rapide des tourbillons et leur développement font que parfois l'un d'eux est absorbé par le suivant (fig. 41). De plus, il faut noter qu'en se déplaçant vers l'aval la solution alternée devient de plus en plus marquée.

III.2. ETUDE THEORIQUE DE LA STABILITE

Les études théoriques concernant la stabilité d'un écoulement reposent sur l'hypothèse que celui-ci est soumis à des petites perturbations. Celles-ci peuvent exister par exemple dans la buse d'alimentation à cause d'irrégularités de débits ou de la rugosité des parois.

Les premières études théoriques ont été réalisé par REYNOLDS et RAYLEIGH. Ce n'est cependant que vers 1930, avec PRANDTL et TOLLMIEN, que des études complètes ont abouti. Ainsi TOLLMIEN (réf. 11) a montré qu'un écoulement, dont le profil des vitesses dans une section perpendiculaire à la direction générale de cet écoulement possède un point d'inflexion, est instable. Ce critère concernant les écoulements limités par des parois a été étendu par HOLLINGDALE (réf. 12) aux écoulements en milieu indéfini.

La méthode des petites perturbations repose sur l'hypothèse qu'à l'écoulement moyen se superpose une perturbation dont l'amplitude est petite par rapport aux valeurs des quantités de l'écoulement moyen. On suppose que celui-ci, tout comme l'écoulement global obtenu, vérifie les équations de NAVIER-STOKES. Ceci revient donc à une linéarisation. Si de plus on suppose que l'écoulement est bidimensionnel et possède un profil de vitesses indépendant de l'abscisse, on obtient, par élimination de la pression (réf. 13), l'équation dite de ORR-SOMMERFELD, dont la résolution permet de connaître en tout point et à tout instant les vitesses de perturbation. L'hypothèse sur la bidimensionnalité de l'écoulement a été justifiée en particulier par SQUIRE (réf. 14) qui, en considérant une perturbation tridimensionnelle, a montré qu'alors l'écoulement est plus stable que lorsqu'on prend une perturbation bidimensionnelle. (Le nombre de REYNOLDS minimum pour avoir instabilité est plus élevé avec une perturbation tridimensionnelle).

Par contre, l'hypothèse concernant la non évolution du profil des vitesses selon x n'est plus satisfaite dans le cas des jets à profil initial uniforme. Le fait de négliger ainsi les dérivées par rapport à x devient inadéquate dans la zone du point d'inflexion du profil.

Toutefois, même dans le cadre de ces hypothèses, la résolution de l'équation complète est assez complexe. Elle a ainsi fait l'objet de nombreuses études dont la plupart cependant avaient pour but de déterminer le nombre

de REYNOLDS au-dessous duquel l'écoulement est stable quelle que soit la perturbation. C'est donc la recherche du critère de transition d'un jet initialement laminaire. Dans ce sens, LESSEN et FOX (réf. 15) ont utilisé les développements en série de TAYLOR, tandis que CURLE (réf. 16) propose une extension de la méthode de Mc KOEN de transformation de l'équation différentielle en équation intégrale. En 1958, TATSUMI et KAKUTANI (réf. 17) proposent de calculer les branches supérieurs et inférieures de la courbe de "stabilité neutre" par des développements en série respectivement des puissances de $(\alpha \mathcal{R})^{-1}$ et de $(\alpha \mathcal{R})$, tandis qu'HOWARD (réf. 18) part de la solution pour $\mathcal{R}$ infini et déduit une solution en développements en série des puissances de α . Nous citerons enfin le livre de LIN (réf. 19) qui traite de nombreux cas d'instabilité.

Certains expérimentateurs se sont uniquement intéressés à la solution correspondant à un nombre de REYNOLDS infini. Ainsi, SAVIC (réf. 20) et MURPHY (réf. 21) ont obtenu la solution exacte concernant le jet laminaire ayant le profil donné par BICKLEY. Ils ont montré que la fonction courant obtenue est comparable avec les lignes expérimentales obtenues par BROWN et fait apparaître le tourbillon.

Enfin SATO (réf. 8) et SAKAO (réf. 22) ont étudié expérimentalement la répartition et l'intensité des vitesses de perturbation. Ils ont montré en particulier que le développement exponentiel de l'intensité de fluctuation n'a lieu que jusqu'à une abscisse de l'ordre de 5fois la largeur de la buse. Remarquons que cette abscisse correspond à la limite du noyau potentiel d'un jet.

a) - Hypothèses :

Notre but est de déterminer dans la région initiale d'un jet plan les conditions naturelles d'écoulement et de stabilité. Le jet que nous considérons est un jet plan uniforme qui possède donc un profil des vitesses rectangulaire dans la section de sortie de la buse $\left(\frac{u}{U_0}=1, \forall y \in \left[-l_0/2, l_0/2\right]\right)$

Afin d'aboutir à des calculs analytiques réalisables, nous supposerons que ce jet possède les caractéristiques établies dans le chapitre II. En particulier la vitesse longitudinale u sera définie par (48) et (49) :

$$z = \frac{0{,}57 - 1{,}14y}{ax} + 0{,}43 \qquad (48)$$

$$\frac{u}{U_s} = 0{,}5(1 + th\, z) \qquad (49)$$

Nous supposerons, ce qui est toujours vérifié, que la vitesse transversale du jet v est négligeable devant u et nous prendrons $v = 0$. Les couches limites initiales pouvant exister initialement dans le jet seront prises en considération lors de la comparaison des résultats théoriques et expérimentaux.

Nous supposerons que le jet est plan et donc l'écoulement bidimensionnel. Selon la méthode exposée dans la réf. 13, nous considérons un écoulement moyen caractérisé par une vitesse $\vec{U}$ (u, v, w) et une pression p, auquel se superpose une perturbation définie par $\vec{U}'$ (u', v', w') et p'. L'écoulement moyen ainsi que l'écoulement global défini par $(\vec{U}+\vec{u'})$ et $(p+p')$ sont supposés vérifier chacun les équations de NAVIER et STOKES. L'utilisation de ces équations suppose donc une linéarisation du problème. Or, lorsque le jet est pris globalement, c'est-à-dire jusqu'à une abscisse relativement importante par rapport à la largeur de la buse, son comportement est non linéaire (chapitre VI). Toutefois, il faut noter qu'on étudie la stabilité naturelle du jet et que la figure 40 montre qu'au voisinage de la buse, les mouvements du jet sont de très faibles amplitude. L'hypothèse d'un comportement linéaire peut donc être considérée comme correcte et est justifiée par le fait que la largeur de jet concernée par le mouvement (principalement la zone proche du point d'inflexion du profil des vitesses) est très mince. Or, plus le jet est mince et plan, plus son comportement se rapproche d'un système linéaire car les non-linéarités apparaissent dans les intéractions réciproques des diverses

couches d'écoulement.

Considérons enfin la dernière caractéristique du jet considéré qui est l'évolution de son profil selon l'abscisse x. Cette évolution est prépondérante car le profil des vitesses passe du profil rectangulaire initial au profil de jet établi pour une distance de l'ordre de 6 à 7 fois la largeur de la buse. C'est donc une évolution rapide avec de plus une singularité initiale représentée par la forme en créneau. Si l'on ne considère qu'un demi jet, la variation $\frac{u}{U_s} = f(y)$ représente donc un échelon pour $y = l_s/2$. Nous tiendrons compte de cette variation en conservant les dérivées de la vitesse par rapport à x.

b) - Mise en équation

Ecrivons que l'écoulement moyen et l'écoulement global vérifient les équations de NAVIER STOKES :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{grad}\,p + \nu\Delta\vec{U} \qquad (60)$$

$$\frac{d(\vec{U}+\vec{U}')}{dt} = -\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{grad}(p+p') + \nu\Delta(\vec{U}+\vec{U}') \qquad (61)$$

auxquelles il faut joindre les équations de continuité :

$$div\,\vec{U} = 0 \qquad et \qquad div(\vec{U}+\vec{U}') = 0 \qquad (62)$$

Cette dernière relation nous donnant immédiatement :

$$div\,\vec{U}' = 0 \qquad (63)$$

Avec les hypothèses faites (ν = 0, écoulement bidimensionnel) et en négligeant les termes carrés par rapport aux vitesses de perturbation, on obtient à partir de (60) et (61) :

$$\left[\frac{\partial u'}{\partial t} + u\frac{\partial u'}{\partial x}\right] + \left[u'\frac{\partial u}{\partial x} + v'\frac{\partial u}{\partial y}\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} + \nu\Delta u' \qquad (64)$$

$$\left[\frac{\partial v'}{\partial t} + u\frac{\partial v'}{\partial x}\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} + \nu\Delta v'$$

Eliminons la pression en dérivant la 1ère équation par rapport à y

la seconde par rapport à x et en faisant la différence :

$$\left[\frac{\partial^2 u'}{\partial t\,\partial y} - \frac{\partial^2 v'}{\partial t\,\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v'}{\partial x} + u\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}\right)\right]$$

$$+\left[\frac{\partial u'}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + u'\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + v'\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = \nu\left[\frac{\partial}{\partial y}(\Delta u') - \frac{\partial}{\partial x}(\Delta v')\right] \quad (65)$$

° Considérons alors la perturbation définie par $\vec{U}'$ et p'

$U'(u', v')$ doit vérifier (63). Nous supposons que toute perturbation peut s'écrire sous forme d'une série de FOURIER, chaque terme représentant une oscillation particulière.

Afin de tenir compte de l'évolution du profil des vitesses, nous adopterons la méthode suivante. Si $u(Xi)$ est le profil dans la section Xi du jet réel, nous appliquerons la méthode des petites perturbations à un jet fictif dont le profil des vitesses serait $u(Xi)$ quelque soit l'abscisse. Les gradients de vitesse par rapport à x conservés dans les équations, les résultats obtenus seront appliqués au jet réel dans la section Xi . La répétition pour différentes valeurs de Xi de ce processus nous permettra ainsi de connaître l'évolution des paramètres de stabilité le long de l'écoulement. On peut alors écrire que chaque oscillation particulière dérive d'une fonction courant de la forme :

$$\Psi(x,y,t) = \varphi(y)\, e^{i\alpha_1(x-ct)} \quad (66)$$

- α_1 étant un nombre réel (la longueur d'onde λ_1 de cette oscillation est égale à $2\pi/\alpha_1$)
- C étant un nombre complexe représentant la vitesse de propagation de la perturbation

Remarque :

Nous utilisons la notation complexe. En fait si $R(\varphi)$ et $J(\varphi)$ représentent respectivement les parties réelles et imaginaires de φ on a :

$$\Psi(x,y,t) = R(\varphi).\cos\alpha_1(x-ct) - J(\varphi)\sin\alpha_1(x-ct)$$

La fonction courant (66) est telle que les vitesses u' et v' vérifient l'équation de continuité (63) :

$$\begin{cases} u' = \dfrac{d\varphi}{dy}\, e^{i\alpha_1(x-ct)} \\ v' = -i\alpha_1 \varphi\, e^{i\alpha_1(x-ct)} \end{cases} \tag{67}$$

Avec ces valeurs de la vitesse, l'équation (65) nous amène à la relation :

$$\left[\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \alpha_1^2\varphi\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right] + i\alpha_1\left[\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \alpha_1^2\varphi\right)(u-c) - \varphi\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

$$= \nu\left[\frac{d^4\varphi}{dy^4} - 2\alpha_1^2\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \alpha_1^4\varphi\right] \tag{68}$$

C'est l'équation générale qui définit les conditions de stabilité de l'écoulement.

Nous rendrons cette équation adimensionnelle en utilisant des notations suivantes :

$$\begin{cases} x = X l_s & y = Y l_s \\ \varphi = \phi U_s l_s & \alpha_1 = \alpha / l_s \\ u = U_s\left(\dfrac{u}{U_s}\right) & c = U_s\left(\dfrac{c}{U_s}\right) \end{cases} \tag{69}$$

et nous obtenons :

$$\left[\left(\frac{d^2\phi}{dY^2} - \alpha^2\phi\right)\frac{\partial(u/U_s)}{\partial X} + \frac{d\phi}{dY}\frac{\partial^2(u/U_s)}{\partial X \partial Y}\right] + i\alpha\left[\left(\frac{d^2\phi}{dY^2} - \alpha^2\phi\right)\left(\frac{u-c}{U_s}\right)\right.$$

$$\left. - \phi\frac{\partial^2(u/U_s)}{\partial Y^2}\right] = \frac{1}{Rl_s}\left[\frac{d^4\phi}{dY^4} - 2\alpha^2\frac{d^2\phi}{dY^2} + \alpha^4\phi\right]$$

Pour résoudre cette équation nous nous placerons à un nombre de REYNOLDS infini. En fait, cette condition impose $Rl_s \gtrsim 500$ (réf. 16 et 17). Ainsi, en utilisant le profil u/U_s défini dans le chapitre II et en posant $\phi(Y) = \xi(z)$, nous obtenons l'équation

$$\left[\left(\frac{d^2\xi}{dz^2} - \left(\frac{\alpha a X}{1{,}14}\right)^2\xi\right)\right]\left[-\left(\frac{z-0{,}43}{X}\right)\frac{d(u/U_s)}{dz} + i\alpha\left(\frac{u-c}{U_s}\right)\right] - \frac{1}{X}\frac{d\xi}{dz}\left[\frac{d(u/U_s)}{dz}\right. \tag{70}$$

$$\left. + (z-0{,}43)\frac{d^2(u/U_s)}{dz^2}\right] - i\alpha\xi\frac{d^2(u/U_s)}{dz^2} = 0$$

Dans cette relation, les termes réels proviennent des dérivées de la vitesse moyenne u selon x, tandis que les termes imaginaires sont dûs aux vitesses de perturbation.

Nous chercherons la solution correspondant à la "stabilité neutre", c'est-à-dire la longueur d'onde de la perturbation telle qu'elle ne soit ni amortie, ni amplifiée dans l'écoulement.

On montre que dans ce cas, la vitesse de propagation c est égale à la valeur de la vitesse du jet au point d'inflexion du profil. c est donc réel et a la valeur relation (50).

$$c = 0{,}5\,U_s \tag{71}$$

Nous voyons dans l'expression (70) qu'interviennent d'une part des termes relatifs au point d'inflexion $\left(c\,,\ \frac{d^2(u/U_s)}{dz^2}\right)$ et d'autre part des termes qui proviennent des dérivées de la vitesse par rapport à x. Nous allons évaluer les valeurs relatives de ces deux séries de termes. Pour celà nous noterons :

$$\begin{cases} f(z) = -\dfrac{z-0{,}43}{X}\ \dfrac{\dfrac{d(u/U_s)}{dz}}{\alpha\left(\dfrac{u-c}{U_s}\right)} \\[2ex] g(z) = \dfrac{\dfrac{d(u/U_s)}{dz} + (z-0{,}43)\dfrac{d^2(u/U_s)}{dz^2}}{\alpha X \dfrac{d^2(u/U_s)}{dz^2}} \end{cases} \tag{72}$$

- Etude de $f(z)$

$$f(z) = -\frac{z-0{,}43}{X}\ \frac{\dfrac{d(u/U_s)}{dz}}{\alpha\dfrac{(u-c)}{U_s}}$$

Soit, compte tenu de (49) et (71) :

$$\alpha X f(z) = -\frac{(z-0{,}43)(1-th^2 z)}{th\,z}$$

$$et\quad \frac{d}{dz}(\alpha X f) = -\frac{1-th^2 z}{th^2 z}\left[th\,z - (z-0{,}43)(1+th^2 z)\right]$$

Cette dérivée s'annule donc pour $z = \pm\infty$ ainsi que pour la valeur de z telle que $(z-0{,}43) = \dfrac{th\,z}{1+th^2 z}$ soit $z = 0{,}91$. Elle devient infini pour $z = 0$.

La figure 42 montre les variations de $(\alpha X \varphi)$ en fonction de z Or, et nous le verrons par la suite, le terme αX est de l'ordre de grandeur de 10. Ainsi φ est de l'ordre de 1 pour $z = \pm 0,05$.

Etude de $g(z)$

$$g(z) = \frac{\frac{d(u/u_s)}{dz} + (z-0,43)\frac{d^2(u/u_s)}{dz^2}}{\alpha X \frac{d^2(u/u_s)}{dz^2}}$$

Soit, compte tenu de (49) :

$$\alpha X g(z) = -\frac{0,5}{th z} + (z - 0,43)$$

et

$$\frac{d(\alpha X g)}{dz} = 0,5\,\frac{(1+th^2 z)}{th^2 z} \qquad \text{(toujours } > 0\text{)}$$

Pour	$z \longrightarrow -\infty$	$\alpha X g \simeq z + 0,07$	droites
Pour	$z \longrightarrow +\infty$	$\alpha X g \simeq z - 0,93$	asymptotes

Les variations de $(\alpha X g)$ en fonction de z sont représentées sur la figure 42.

Compte tenu de la remarque précédente, nous voyons que $f(z)$ et $g(z)$ sont supérieurs à 1 dans l'intervalle défini sensiblement par les valeurs $z = -0,05$ et $z = +0,05$. Lorsqu'on se trouve au voisinage de $z = 0$, les termes provenant des dérivées par rapport à ∞ deviennent donc prépondérants.

Nous noterons $[-z_T, +z_T]$ l'intervalle entourant $z = 0$ dans lequel les fonctions φ et g peuvent être considérées comme très grandes. Lorsque z appartient à cet intervalle, l'équation (70) peut s'écrire :

$$\left[\frac{d^2\xi}{dz^2} - \left(\frac{\alpha \sigma X}{1,14}\right)^2 \xi\right]\left[\frac{(z-0,43)}{X}\frac{d(u/u_s)}{dz}\right] + \frac{1}{X}\frac{d\xi}{dz}\left[\frac{d(u/u_s)}{dz} + (z-0,43)\frac{d^2(u/u_s)}{dz^2}\right] = 0$$

soit en utilisant la valeur $u(z)$

$$\left[\frac{d^2\xi}{dz^2} - \left(\frac{\alpha \sigma X}{1,14}\right)^2 \xi\right](z-0,43) + \frac{d\xi}{dz}\left[1 - 2(z-0,43)th z\right] = 0 \qquad (73)$$

Par contre, lorsque z est extérieur à l'intervalle précédent, la relation (70) nous fournit l'équation classique :

$$\left[\frac{d^2\xi}{dz^2} - \left(\frac{\alpha a X}{1,14}\right)^2 \xi\right] + 2\xi\left(1 - th^2 z\right) = 0 \qquad (74)$$

Si nous posons $A = \left(\frac{\alpha a X}{1,14}\right)^2$, ces deux relations s'écrivent :

$$z \in \left[-z_T, z_T\right] \quad : \quad \left(\frac{d^2\xi}{dz^2} - A\xi\right)(z - 0,43) + \frac{d\xi}{dz}\left[1 - 2(z - 0,43)thz\right] = 0 \qquad (75)$$

$$z \notin \left[-z_T, z_T\right] \quad : \quad \frac{d^2\xi}{dz^2} - \xi\left[A - 2(1 - th^2 z)\right] = 0 \qquad (76)$$

A ces deux équations nous devons joindre les conditions aux limites qui sont :

- pour une perturbation symétrique :

$$\left.\begin{array}{l}\Phi = 0 \\ \Phi' = 1\end{array}\right] \text{ pour } Y = 0 \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l}\Phi = 0 \\ \Phi' = 0\end{array}\right] \text{ pour } Y = +\infty \qquad (77)$$

- pour une perturbation antisymétrique :

$$\left.\begin{array}{l}\Phi = 1 \\ \Phi' = 0\end{array}\right] \text{ pour } Y = 0 \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l}\Phi = 0 \\ \Phi' = 0\end{array}\right] \text{ pour } Y = +\infty \qquad (78)$$

Par rapport à la fonction ξ et la variable z , ces conditions aux limites s'écrivent :

- dans le cas d'une perturbation symétrique :

$$\left.\begin{array}{l}\xi = 0 \\ \xi' = -\frac{aX}{1,14}\end{array}\right] \text{ pour } z = z_0 \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l}\xi = 0 \\ \xi' = 0\end{array}\right] \text{ pour } z = -\infty \qquad (79)$$

- dans le cas d'une perturbation antisymétrique :

$$\left.\begin{array}{l}\xi = 1 \\ \xi' = 0\end{array}\right] \text{ pour } z = z_0 \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l}\xi = 0 \\ \xi' = 0\end{array}\right] \text{ pour } z = -\infty \qquad (80)$$

z_o étant la valeur correspondant à $Y=0$: $z_o = \frac{0,57}{aX} + 043$

Le fait de dissocier l'influence de chacun des deux groupes de termes des équations constitue évidemment un cas limite. Cependant, l'intervalle $(-z_T , z_T)$ tout en étant très petit par rapport aux valeurs extrêmes de z, a une influence prépondérante au voisinage du point d'inflexion, influence qui se retrouve amplifiée dans les valeurs des maxima des vitesses de perturbation et des valeurs de la longueur d'onde.

La résolution du système d'équations (75) et (76) associées aux conditions (79) ou (80) selon le cas, donnent les fonctions $\Phi(Y)$ et $\Phi'(Y)$ ainsi que la valeur de A pour le jet considéré.

Pour déceler l'importance de l'influence de z_T nous avons successivement calculé les solutions I $(z_T=0)$ II $(z_T=0,05)$ III $(z_T=0,10)$ et IV $(z_T=0,15)$. Celles-ci ont été obtenues numériquement selon la méthode de RUNGE KUTTA en ramenant l'équation du second ordre à un système de deux équations, la variable intermédiaire étant la dérivée première $\frac{d\Phi}{dz}$. A est obtenu par application des conditions aux limites en particulier des conditions pour $z \to -\infty$

c. Etude d'une perturbation symétrique

Dans ce cas, si nous considérons deux points de l'écoulement symétriques par rapport à l'axe de la buse, les vitesses de perturbation en ces points sont elles-mêmes symétriques par rapport à ce même axe. Ce dernier est donc axe de symétrie pour l'ensemble de l'écoulement.

La solution est donc l'ensemble (Φ , A) qui vérifie le système constitué par les équations (75) et (76) et les conditions aux limites (79). Celles-ci expriment en particulier que la vitesse transversale v' doit être nulle sur l'axe du jet à cause de la symétrie. Nous examinerons successivement les résultats concernant $\Phi(Y)$, $\Phi'(Y)$ et leur variation en fonction de X, la limite de ces fonctions pour $X \to 0$ et l'influence de la valeur de z_T Enfin nous consacrerons un paragraphe aux résultats concernant les valeurs de A et l'influence sur ce paramètre d'une couche limite initiale.

1. Résultats concernant $\Phi(Y)$ et $\Phi'(Y)$

Si l'on considère uniquement la courbe de "stabilité neutre", l'équation générale (68) se ramène alors, compte tenu de la dissociation des deux groupes de termes, à une équation différentielle à coefficients réels et par conséquent $\Phi(Y)$ est réel. Les vitesses de perturbation s'expriment alors par :

$$\begin{cases} u' = \dfrac{d\varphi}{dy} \cos\alpha_1 (x - ct) \\ v' = -\alpha_1 \varphi \sin\alpha_1 (x - ct) \end{cases}$$

soit, en tenant compte des relations (69) :

$$\begin{cases} \dfrac{u'}{U_s} = \dfrac{d\Phi}{dY} \cos\alpha \left(x - \dfrac{ct}{l_s}\right) \\ \dfrac{v'}{U_s} = -\alpha \Phi \sin\alpha \left(x - \dfrac{ct}{l_s}\right) \end{cases} \qquad (81)$$

Les figures 43 à 58 donnent les variations de Φ et Φ' en fonction de Y pour les solutions I à IV, correspondant respectivement à : Z_T : 0,0 ; 0,05 ; 0,10 ; 0,15. Ces dernières valeurs correspondent à un encadrement de la valeur probable qui est, comme nous l'avons vu au paragraphe III.2.B., de l'ordre de 0,05.

Rappelons que ces solutions correspondent chacune à un jet dont le profil serait, quel que soit α, celui du jet réel pour la section X considérée.

Le changement de signe apparaissant pour $\Phi'(Y)$ correspond en fait à un changement de phase. Ainsi les vitesses de perturbation longitudinales u' de deux points situés de part et d'autre du point d'inflexion sont en opposition de phase. Ceci crée donc une force de cisaillement importante autour du point d'inflexion et ce serait là la cause de la formation des tourbillons dont on peut noter qu'elle s'effectue avec une vitesse d'enroulement initiale très grande. La figure 59 montre la variation selon X de l'ordonnée des points correspondant aux extrêmes de Φ et Φ'. Nous constatons en particulier que les valeurs maximales de la vitesse

transversale v' sont obtenues au voisinage du point d'inflexion représenté par la droite de la figure 59, calculée à partir de la solution du profil des vitesses adoptées. Nous constatons que lorsque $X \longrightarrow 0$, ces extrêma tendent tous vers $Y = 0,5$ qui est la paroi de la buse d'alimentation du jet.

Or, on a déjà mentionné que lorsque $X \longrightarrow 0$, le profil des vitesses que l'on doit considérer tend vers le profil rectangulaire. Si l'on considère uniquement un demi-jet, ce qui est justifié par le fait que les deux zones de mélange ne réagissent pas l'une sur l'autre, la limite du profil est donc constituée par un échelon comme le montre la figure 60. La dérivée première $\frac{d(u/U_s)}{dz}$ est égale à la fonction de DIRAC $\delta(z)$ tandis que la dérivée seconde $\frac{d^2(u/U_s)}{dz^2}$ est la dérivée $\delta'(z)$. Cette dernière peut être définie à partir d'une fonction $f(z)$ par la relation (réf. 28) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z).\delta'(z).dz = -f'(0) \qquad (82)$$

Reprenons alors l'équation (70) écrite pour la solution I :

$$\left[\frac{d^2\xi}{dz^2} - \left(\frac{\alpha a X}{1,14}\right)^2 \xi\right]\left(\frac{u-c}{U_s}\right) - \xi \frac{d^2(u/U_s)}{dz^2} = 0$$

soit avec :

$$-\left(\frac{\alpha a X}{1,14}\right)^2 = A$$

$$-\left(\frac{d^2\xi}{dz^2} - A\xi\right)\left(\frac{u-c}{U_s}\right) - \xi \frac{d^2(u/U_s)}{dz^2} = 0$$

Prenons l'intégrale de cette équation pour z variant de $-\infty$ à $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d^2\xi}{dz^2} - A\xi\right)\left(\frac{u-c}{U_s}\right)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \frac{d^2(u/U_s)}{dz^2}\,dz$$

A partir de la définition (82) de $\delta'(z)$, on peut écrire la limite pour $X \longrightarrow 0$ de cette dernière équation :

$$\lim_{X \to 0}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d^2\xi}{dz^2} - A\xi\right)\left(\frac{u-c}{U_s}\right)dz\right] = -\xi'(0)$$

Soit en explicitant la valeur de $\frac{u-c}{U_s}$:

$$0{,}5\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{d^2\xi}{dz^2}-A\xi\right)dz+0{,}5\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{d^2\xi}{dz^2}-A\xi\right)dz=-\xi'(0)$$

qui nous donne après intégration :

$$A\left[\int_{-\infty}^{0}\xi\,dz-\int_{0}^{+\infty}\xi\,dz\right]=-\xi'(-\infty)-\xi'(+\infty)$$

Or, les conditions aux limites (79) donnent:

$$\begin{cases}\xi'(-\infty)=0\\ -\xi'(z_0)=-\frac{aX}{1{,}14} \quad \text{avec} \quad z_0=\frac{0{,}57}{aX}+0{,}43\end{cases}$$

Donc : $\xi'(+\infty)=\lim_{z_0\to\infty}\xi'(z_0)=\lim_{X\to 0}\xi'(z_0)=0$

On obtient ainsi la relation :

$$A\left[\int_{-\infty}^{0}\xi\,dz-\int_{0}^{+\infty}\xi\,dz\right]=0$$

et donc si l'on suppose que $\lim_{X\to 0}A\neq 0$

$$\int_{-\infty}^{0}\xi\,dz=\int_{0}^{+\infty}\xi\,dz$$

que l'onppeut écrire sous la forme :

$$\int_{0}^{+\infty}\left[\xi(z)-\xi(-z)\right]dz=0$$

Cette relation sera en particulier vérifiée pour

$$\xi(z)=\xi(-z) \qquad (83)$$

Cette limite est bien confirmée par les figures 43 à 58.

Ces dernières montrent aussi que lorsque $X\to 0$, les valeurs maximales de Φ et de Φ' tendent vers l'infini. On remarque cependant que la valeur de z_T a beaucoup d'influence sur ces valeurs maximales. Si l'on représente en particulier les rapports Φ max$i$/ Φ max I , i indiquant l'une des solutions II, III ou IV, on constate que ces rapports

décroissent pour $X \longrightarrow 0$ (fig. 61).

Ceci est dû à l'introduction des termes issus des dérivées des vitesses par rapport à x qui deviennent prépondérants au voisinage du point d'inflexion du profil.

2. Résultats concernant A - Influence d'une couche limite initiale

La valeur de A est obtenue dans chaque cas, de façon que la solution du système d'équations (75) et (76) vérifie les conditions aux limites. Pour chacun des profils $u(z)$ considérés, $\left[X \in (0,5 \; ; \; 5)\right]$, on a ainsi obtenu la valeur de A. Celle-ci est donc une fonction de X, mais dans chacun des cas, notre méthode a consisté à la considérer constante, hypothèse qui nous a permis de ne pas considérer la dérivée $\frac{d\alpha_1}{d\alpha}$ dans la mise en équations. La table de la figure 62 donne A pour tous les cas considérés Les variations $A(X)$ nous ont amené au graphe Log A = $\varphi(X^2)$
Les résultats sont tracés sur la figure 63. On peut les exprimer analytiquement en utilisant les relations $A = \left(\frac{\alpha a X}{1,14}\right)^2 = \left(\frac{2\pi a X}{1,14 \lambda}\right)^2$

On obtient ainsi :

Solution I	$X < 2,34$	$\lambda_I = 0,496\ X$	
	$X > 2,34$	$\lambda_I = 0,486\ X\ e^{0,00354\ X^2}$	(84)
Solution II	$X < 2,12$	$\lambda_{II} = 0,521\ X$	
	$X > 2,12$	$\lambda_{II} = 0,511\ X\ e^{0,00384\ X^2}$	(85)
Solution III	$X < 2$	$\lambda_{III} = 0,548\ X$	
	$X > 2$	$\lambda_{III} = 0,537\ X\ e^{0,0043\ X^2}$	(86)
Solution IV	$X < 1,92$	$\lambda_{IV} = 0,577\ X$	
	$X > 1,92$	$\lambda_{IV} = 0,564 X e^{0,005\ X^2}$	(87)

Les valeurs limites X_c de X indiquées ci-dessus correspondent à l'intersection de la partie linéaire de Log A (X^2) et du palier Log A = cte existant pour X petit. Les relations (84) à (87) seront écrites sous la forme générale :

$$X < X_c \quad : \quad \lambda_i = k_i X$$
$$X > X_c \quad : \quad \lambda_i = m_i X e^{n_i X^2} \qquad (88)$$

i, indiquant la solution considérée.

Les fonctions $\lambda_i(X)$ sont représentées sur la figure 64. La région $\lambda > \lambda_i(X)$ correspond à un écoulement instable, la perturbation étant amplifiée, tandis que pour $\lambda < \lambda_i(X)$ on a amortissement de la perturbation. On constate qu'en particulier pour $X \longrightarrow 0$, c'est-à-dire pour un profil rectangulaire, l'écoulement est instable quelle que soit la longueur d'onde de la perturbation. Lorsqu'on se déplace vers l'aval, le profil des vitesses tend vers le profil du "jet établi" et la longueur d'onde "neutre" croît.

Enfin, on remarque que les courbes de la figure 63, Log A = $f(X^2)$ présentent un changement de pente brusque pour une valeur X_c comprise entre 1,92 et 2,34 selon la solution. Nous pouvons interpréter ce passage d'une loi A (X) linéaire à une loi exponentielle comme une modification du type d'écoulement. Ceci pourra en particulier correspondre au passage de la zone I à la zone II (voir paragraphe III. 1). La valeur λ_c obtenue pour $X = X_c$ sera donc celle qui détermine la formation des tourbillons.

Les résultats que nous venons d'exposer concernent un jet à profil initial parfaitement uniforme. En fait, la plupart des jets réels possèdent des couches limites initiales. Pour en tenir compte, nous supposerons que la longueur d'onde est directement liée à l'épaisseur de quantité de mouvement. En effet, les diverses solutions obtenues montrent que λ dépend directement de la forme du profil des vitesses. Il est donc logique de prendre comme référence l'épaisseur de quantité de mouvement. Ceci a été étudié expérimentalement par SATO (réf. 8). Nous supposerons alors

qu'un jet ayant comme épaisseur de quantité de mouvement initiale θ_s se comporte, du point de vue de la stabilité, comme un jet à profil initial uniforme dans la section X_s telle que ce dernier ait alors θ_s comme épaisseur de quantité de mouvement. La valeur de X_s nous détermine alors la valeur λ_s à l'origine pour le jet réel $(\theta = \theta_s \text{ pour } X=0)$ La variation $\lambda(X)$ pour ce jet sera alors :

$$\lambda = \lambda_s + \lambda_i(X) \qquad (89)$$

$\lambda_i(X)$ étant donné par l'une des solutions (88).

Remarquons cependant que cette méthode ne tient pas compte du fait que la couche limite initiale a un profil des vitesses sans point d'inflexion et que le profil de comparaison en a un. Comme on montre que l'existence du point d'inflexion rend l'écoulement plus instable, la valeur λ_s sera une borne inférieure de la valeur réelle.

d. Etude d'une perturbation antisymétrique

Les vitesses de perturbation en deux points (X, Y) et $(X, -Y)$ sont alors en phase. La solution (ξ, A) vérifie le système des équations (75) et (76) avec les conditions aux limites (80).

Les figures 65 à 72 donnent les résultats obtenus pour les fonctions $\Phi(Y)$ et $\Phi'(Y)$ pour les solutions I et II. Les deux autres solutions donnent des courbes du même type. Nous constatons que dans ce cas, le maximum de $\Phi'(Y)$ correspondant à $Y > 0,5$ est plus grand que celui pour $Y < 0,5$. Tout comme pour une perturbation symétrique, la figure 73 montre que les rapports $\Phi_{max\,i}/\Phi_{max\,I}$ décroissent lorsque $X \longrightarrow 0$, ce qui confirme l'influence des dérivées par rapport à x des termes de vitesse.

De même, la table de la figure 74 donne les valeurs obtenues pour A avec les diverses solutions. Nous constatons que lorsque $X \longrightarrow 0$ le palier A = cte est atteint par valeurs supérieures tandis que pour une perturbation symétrique, on l'atteignait par valeurs inférieures. Cependant les valeurs de A pour $X \longrightarrow 0$ sont les mêmes dans les deux cas. Il en est de mê-

me des valeurs de X_c comme le montre la figure 75. Les relations seront mises sous la forme générale :

$$X < X_c \quad : \quad \lambda_j = k_j X$$
$$X > X_c \quad : \quad \lambda_j = m_j X e^{-n_j X^2} \qquad (90)$$

les valeurs de k_j , m_j , n_j étant données par :

Solution I
$X < 2,34$ $\quad \lambda_I = 0,496\ X$
$X > 2,34$ $\quad \lambda_I = 0,502\ X\ e^{-0,00255\ X^2}$ (91)

Solution II
$X < 2,12$ $\quad \lambda_{II} = 0,521\ X$
$X > 2,12$ $\quad \lambda_{II} = 0,528\ X\ e^{-0,00292\ X^2}$ (92)

Solution III
$X < 2$ $\quad \lambda_{III} = 0,548\ X$
$X > 2$ $\quad \lambda_{III} = 0,554\ X\ e^{-0,00311\ X^2}$ (93)

Solution IV
$X < 1,92$ $\quad \lambda_{IV} = 0,577\ X$
$X > 1,92$ $\quad \lambda_{IV} = 0,584\ X\ e^{-0,00348\ X^2}$ (94)

Ces solutions $\lambda_j(X)$ sont représentées sur la fig. 76.

Nous constatons ainsi que les longueurs d'onde λ_i et λ_j correspondant à des perturbations symétriques et antisymétriques sont égales pour des jets de profils de vitesses très aplatis et s'écartent ensuite de cette solution lorsque le profil tend vers le profil de jet établi.

III. 3. CARACTERISTIQUES THEORIQUES DES RUES DE TOURBILLONS

Cela concerne l'étude des caractéristiques de l'écoulement dans la zone II dans laquelle chaque région de mélange est occupée par une rue de tourbillons.

Le système d'équations que nous avons obtenu nous a permis d'envisager deux modes possibles : d'une part l'apparition simultanée de deux tourbillons sur les frontières du noyau potentiel, d'autre part la formation alternée dans les deux zones de mélange. En fait , la configuration qui apparaît dépend beaucoup du profil des vitesses du jet. SATO (réf. 8) a noté que la solution antisymétrique n'existe que lorsque ce profil s'approche du profil parabolique. Nous verrons dans l'exposé des résultats expérimentaux qu'en fait la solution symétrique est celle qui est prépondérante, ce qui confirme qu'un jet à profil des vitesses initial uniforme ne peut qu'engendrer deux rues de tourbillons symétriques. Celà suppose évidemment à priori qu'il s'agit d'une instabilité naturelle du jet. Nous verrons toutefois que dans le cadre des oscillations globales autour du partiteur, tout comme dans le sillage d'un cylindre où il existe un phénomène global alterné, la formation de tourbillons autour du noyau potentiel n'est pratiquement pas perturbée.

a. Abscisse de formation et fréquence des tourbillons

Les paragraphes précédents nous ont permis d'obtenir les caractéristiques essentielles d'une perturbation linéaire neutre. L'expérience montrant l'existence de tourbillons, nous devons chercher les relations qui existent entre la perturbation linéaire et le tourbillon qui est une perturbation discrète.

La transition et donc l'écoulement dans la région du noyau potentiel sont essentiellement dûs au transfert d'énergie du jet vers le fluide ambiant qui se traduit par le phénomène d'entraînement. Celui-ci est très faible dans la zone I où l'écoulement est pratiquement un "écoulement parallèle" (fig. 10). Il est donc logique de dire que le débit entraîné dans la région entourant le noyau potentiel l'est surtout par les tourbillons (réf. 5). Ceci implique donc que ceux-ci s'enroulent vers l'extérieur afin d' "emprisonner" une certaine quantité de fluide ambiant. En fait la propagation de la perturbation linéaire dans la zone I fait apparaître une protubérance sur la frontière effective du jet. Celle-ci rencontre alors un fluide qui est au repos, comme d'autre part, elle est soumise à un frottement important

de la part des particules appartenant au jet, la diminution d'énergie progressive des particules ainsi isolées dans le fluide ambiant amène un enroulement très rapide du tourbillon vers l'extérieur du jet.

Nous avons vu que si l'on considère deux points M et M' appartenant à une section donnée $X = X_T$ respectivement tels que $Y_M < 0,5$ et $Y_{M'} > 0,5$, les vitesses $u'(M)$ et $u'(M')$ sont en opposition de phase. De plus, les relations (81) montrent que $v'(M)$ est en avance de $\pi/2$ par rapport à $u'(M)$ car pour $0<Y<0,5$, $\Phi(Y)$ et $\Phi'(Y)$ sont tous deux positifs. Le 1er tourbillon se formera alors dans la section où $u'(M)$ et $u'(M')$ seront tous deux maxima car alors le "cisaillement" entre les couches de fluide passant par M et M' sera maximum. La section dans laquelle apparaîtra le tourbillon sera donc telle que dans cette section $u'(M)$ sera maximum et positif, et donc $u'(M')$ maximum mais négatif. Dans cette section, la vitesse transversale sera nulle. Or, il est logique de supposer que le point $(X=0\ ,\ Y=0,5)$ c'est à dire l'arête de la buse, est un point où la vitesse transversale est nulle du fait de la présence de la paroi. Ainsi les sections $X=0$ et X_T sont telles qu'elles correspondent à deux zéros successifs de v'. L'abscisse X_T sera donc égal à une demi-longueur d'onde.

Par conséquent, l'abscisse de formation X_T des tourbillons, ou tout au moins l'abscisse pour lequel il apparaît en tant que tel, est égal à la demi-longueur d'onde initiale de la perturbation. Nous avons vu que cette longueur d'onde λ_c est celle qui correspond à la valeur X_c (paragraphe III.2 b.2), X_c étant compris entre 1,92 et 2,34 selon la solution choisie.

Compte tenu de l'épaisseur de quantité de mouvement initiale δ_0, nous obtenons :

$$\lambda_c = \lambda_s + \lambda_i(X_c) \qquad (95)$$

Soit :

$$X_T = \frac{1}{2}\left(\lambda_s + \lambda_i(X_c)\right) \qquad (96)$$

On peut évaluer λ_s en fonction de θ_s. Comme nous sommes dans la région telle que X est petit, les relations (52) et (88) nous donnent respectivement

$$\theta = 0,0395\ X$$

$$\lambda_i = k_i X$$

Soit pour $\theta = \theta_s$: $\lambda = \lambda_s = \dfrac{k_i}{0,0395}\ \theta_s$

La relation (96) s'écrit alors :

$$X_T = \frac{k_i}{2}\left(\frac{\theta_s}{0,0395} + X_c\right) \qquad (97)$$

La figure 77 donne les variations $X_T(\theta_s)$ pour les diverses solutions.

Or, dans cette zone $(X < X_T)$, on est dans la zone linéaire et la vitesse de propagation de la perturbation est égale à $0,5\ U_s$. La période τ est donc dans le cas de tourbillons symétriques :

$$\tau_s = \frac{2 X_T l_s}{U_s} \qquad (98)$$

et la fréquence :

$$f_s = \frac{U_s}{2 X_T l_s} \qquad (99)$$

l_s étant la largeur de la buse.

Le nombre de STROUHAL S_s correspondant est donc :

$$S_s = \frac{f_s l_s}{U_s} = \frac{1}{2X_T} \qquad (100)$$

Par contre, lorsque on a des tourbillons alternés, la période des tourbillons sur la même rue sera le double de τ_s et donc :

$$\tau_{AS} = \frac{4 X_T l_s}{U_s} \quad \text{et} \quad S_{AS} = \frac{1}{4 X_T} \qquad (101)$$

b. Vitesses et distances entre tourbillons

Selon notre interprétation de la variation brusque de pente de la fonction Log A (X^2) , la longueur d'onde $\lambda(X)$ est définie par une fonction de la forme (relation 88) :

$$\lambda_i = m_i X e^{n_i X^2} \qquad (88)$$

Cependant, les constantes m_i et n_i prenant les valeurs indiquées dans les relations (84) à (87), la variation de λ du type exponentiel n'apparaît que pour $X > X_c$. En fait cette dernière valeur n'a aucune signification directe pour l'abscisse des tourbillons puisque ceux-ci ne sont liés qu'à $\lambda(X_c)$. Par conséquent, les déplacements des tourbillons sont caractérisés par (88), mais à une constante près. Pour déterminer cette constante, nous utiliserons la vitesse de propagation de la perturbation dans la zone "linéaire" de l'écoulement et nous écrirons qu'elle est valable jusqu'à l'abscisse correspondant à la longueur d'onde qui a déterminé la formation des tourbillons. Compte tenu de la couche limite initiale, cette dernière est donc définie par la relation (96) et égale à $2X_T$.
La loi de variation $\lambda(X)$ qui déterminera donc le déplacement des tourbillons sera :

$$\lambda(X) = \lambda_s + m_i X e^{n_i X^2} + K_o$$

K_o étant déterminé par la condition :

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)_{X=2X_T} = 0{,}5\ U_s/l_s$$

On obtient ainsi la vitesse longitudinale de déplacement des tourbillons sous la forme :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{B + \lambda_i(X)}{2\mathcal{C}_s} \qquad (102)$$

La constante B étant définie par:

$$B = 2X_T\left[1 - m_i e^{4n_i X_T^2}\right] \qquad (103)$$

L'abscisse X d'un tourbillon donné sera donc au temps t :

$$\int_{X_i}^{X} \frac{dX}{B + m_i X e^{n_i X^2}} = \frac{t - t_i}{2\mathcal{C}_s} \qquad (104)$$

les valeurs X_i et t_i étant déterminées par le passage du tourbillon en un point particulier. En vue de la comparaison avec les résultats expérimentaux, nous choisirons $X_i = t_i = 1$ et donc :

$$\int_1^X \frac{dx}{B + n_i X e^{n_i X^2}} = \frac{t-1}{2\mathcal{C}_3} \qquad (105)$$

L'intégration numérique de cette intégrale nous a permis de tracer les variations $X\left(\frac{t-1}{2\mathcal{C}_3}\right)$ (fig. 78). Remarquons que, quelle que soit la solution envisagée, cette courbe reste pratiquement inchangée. Sous forme analytique, nous prendrons la relation approchée suivante :

$$X = 0{,}105\, e^{2{,}25\sqrt{\frac{t-1}{2\mathcal{C}_3}+1}} \qquad (106)$$

Notons enfin que la relation (102) est valable aussi bien pour une perturbation symétrique que pour une perturbation antisymétrique.

Nous pouvons alors calculer la distance qui sépare les $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ tourbillons, à un instant t :

$$X_{n+1} - X_n = 0{,}105 \left[e^{2{,}25\sqrt{\frac{t-1}{2\mathcal{C}_3}+3/2}} - e^{2{,}25\sqrt{\frac{t-1}{2\mathcal{C}_3}+1}} \right]$$

soit :

$$X_{n+1} - X_n = X_n \left[e^{2{,}25\left[\sqrt{\frac{t-1}{2\mathcal{C}_3}+3/2} - \sqrt{\frac{t-1}{2\mathcal{C}_3}+1}\right]} - 1 \right] \qquad (107)$$

Cette relation nous permettra de calculer $(X_{n+1} - X_n)$ en fonction de $\frac{1}{2}(X_n + X_{n+1})$ et de comparer les résultats théoriques et les résultats expérimentaux.

c. Conclusion

Nous voyons ainsi qu'à partir de la solution des équations linéarisées concernant la propagation d'une perturbation "neutre", il est possible, en interprétant les variations brusques du paramètre A comme une modi-

fication de l'écoulement, d'obtenir les caractéristiques de formation et de déplacement des tourbillons.

Ceux-ci existent en tant que tels jusqu'à ce que les deux rues se rejoignent, c'est-à-dire à la fin du noyau potentiel du jet.

CHAPITRE IV

- : -

ETUDE EXPERIMENTALE DE L'ECOULEMENT DANS UN JET LIBRE

AU VOISINAGE DU NOYAU POTENTIEL

IV.1. DESCRIPTION DES INSTALLATIONS

L'expérimentation a été réalisée sur une table à surface libre dont le principe et les caractéristiques essentielles ont été étudiés dans la première partie de nos travaux. Notons cependant qu'en particulier les caractéristiques d'attachement d'un jet à une paroi sont identiques à celles obtenues avec un jet en charge.

L'écoulement dans les zones de mélange et donc les phénomènes d'entraînement du fluide ambiant sont comparables entre un jet plan à surface libre et un jet en charge. Cette analogie nous a permis de faire nos expériences sur une table à eau et avec des largeurs de jet suffisamment grandes pour éviter toute influence parasite des systèmes annexes. De plus, les possibilités de visualisation nous ont permis la mesure de certaines grandeurs difficilement repérables par des systèmes de mesure classiques.

La table à surface libre utilisée est la table T_1 présentée dans le paragraphe III.2.a. de la première partie de nos travaux. Alimentée par un système de réservoirs à niveau constant, elle permet d'obtenir un débit maximum de l'ordre de 2 l/s.

L'installation (fig. 79) comporte essentiellement une dalle en béton armé, d'environ 6 m2, recouverte d'une chappe lissée.

Le jet est formé dans une buse profilée, réalisée également en ciment et dont l'état de surface a été particulièrement soigné . Des systèmes de tranquilisation disposés à l'alimentation et sur les faces latérales du modèle assurent la régularité de l'écoulement et empêchent la propagation latérale d'ondes parasites.

IV.2. METHODES DE MESURE

L'étude expérimentale que nous avons effectuée concerne essentiellement l'aspect de l'écoulement dans les zones de mélange situées de part et d'autre du noyau potentiel du jet. Afin d'obtenir une échelle géo-

métrique satisfaisante pour ces régions, nous avons utilisé une buse formant un jet de largeur initiale : $l_{s1} = 45$ mm. Cependant, certaines séries d'essais ont été reprises avec un jet tel que $l_{s2} = 97$ mm, de façon à éliminer, dans le cadre de cette dimension, l'influence de la valeur absolue.

Le tirant d'eau sur la dalle a été fixé par les déversoirs à mince paroi à la valeur de 78 mm.

En ce qui concerne les caractéristiques moyennes du jet, les débits ont été mesurés au moyen de deux diaphragmes étalonnés, de diamètres respectifs de 20 et 25 mm, placés en parallèle, tandis que les profils des vitesses moyennes dans la section de sortie de la buse ont été obtenus avec un tube de Pitot, dont les deux branches ont un diamètre de 1, 5 mm. Le planimètrage des courbes $\frac{u}{U_s}\left(1 - \frac{u}{U_s}\right) = f(y)$ nous a permis d'obtenir pour les largeurs l_{s1} et l_{s2}, des épaisseurs de quantité de mouvement initiales de respectivement $\theta_s = 0,0159$ et $\theta_s = 0,011$.

Les mesures concernant les perturbations et l'écoulement à un instant donné nous ont amené d'une part à utiliser un anémomètre, d'autre part à visualiser l'écoulement. Des sondes à fil ou à film chauds (fig. 80) nous ont permis de mesurer les fréquences de variation de la perturbation, c'est-à-dire les fréquences de formation des tourbillons. La sortie de l'anémomètre pouvait être commutée soit sur un oscilloscope, soit sur un enregistreur à rayon U.V . Cependant la plupart de nos mesures concernant les tourbillons ont été obtenues par visualisation, avec un mélange huile soluble - eau qui montre parfaitement l'écoulement dans les zones de mélange. Les films que nous avons réalisés nous ont aussi permis de faire d'une part une étude qualitative de l'écoulement, et d'autre part de mesurer les caractéristiques essentielles des rues de tourbillons, à partir d'une base de temps placée dans le champ de la caméra. Les figures 81 et 82 donnent les aspects de l'écoulement pour différents régimes.

IV. 3. ETUDE QUALITATIVE DE L'ECOULEMENT

Au phénomène de variation rapide du profil des vitesses qui existe

dans la région du noyau potentiel d'un jet s'ajoute dans notre cas la transition dûe au régime d'écoulement. En effet, les nombres de Reynolds correspondant à nos essais sont compris entre 1000 et 8000, valeurs que l'on rencontre dans le fonctionnement des modules fluidiques que l'on alimente couramment sous des presssions de 100 à 200 mb.

Les photographies de l'écoulement (fig. 82) montrent bien les trois régions que nous avons citées au paragraphe III.1., à savoir :

- Zone I : comprise entre X = 0 et $X \cong$ 0,5 à 0,7. L'écoulement est continu et la propagation des perturbations est caractérisée par la déformation continue des trajectoires visualisées.
- Zone II : comprise entre X = 0,7 et $X \cong$ 4 à 5. C'est la région dans laquelle se forment et s'épanouissent les tourbillons. Elle est caractérisée par un entraînement important du fluide ambiant et l'existence de perturbations discrètes. A la suite des études faites en particulier par MARTINEZ (réf. 5), nos travaux montrent bien que les tourbillons existent et que c'est par eux que s'effectue la transition entre le profil uniforme initial et le profil de "jet établi" qui apparaît pour X grand.
  Aux faibles nombres de REYNOLDS, la fréquence de formation est assez faible pour que l'on puisse étudier les caractéristiques des rues et observer le processus d'enroulement de chacun des tourbillons. Dans cette zone, les rues ne réagissent pas l'une sur l'autre et la partie centrale du jet est non perturbée.
- Zone III : pour $X \gtrsim$ 4 à 5. Pour une abscisse voisine de cette dernière, les deux tourbillons appartenant à chacune des rues se rejoignent et le processus discret disparaît, les tourbillons ayant transmis par viscosité leur énergie à l'ensemble du fluide.

Les limites entre ces différentes régions sont évidemment difficiles à déterminer. Ainsi le tourbillon qui se forme réellement dans la zone II apparaît déjà dans la première zone sous forme d'une protubérance de la trajectoire visualisée. De même les tourbillons existent encore dans la

zone III, mais leur taille est très importante et ils ont perdu beaucoup de leur intensité tourbillonnaire. Examinons toutefois la limite entre les régions II et III. Nous définirons l'abscisse limite X_N comme celle pour laquelle les deux tourbillons appartenant chacun à une rue et qui se propagent ensemble, se rejoignent. La mesure de X_N a été faite à partir des nombreuses photographies réalisées. L'imprécision effective de chacune des mesures a été compensée par un grand nombre d'essais. La figure 83 montre les résultats $X_N(\bar{U})$ obtenus. Chacun des points correspond à la moyennne arithmétique des mesures effectuées pour chacune des séries de mesures, comprenant chacune une dizaine de points expérimentaux.

Nous constatons ainsi que lorsque la vitesse est assez grande, la valeur de X_N se stabilise autour de la valeur 4,4. Cette dernière valeur correspond à la limite du noyau potentiel qui est généralement déterminée à partir du profil des vitesses moyennes sur l'axe du jet. Par contre, la figure 83 montre que pour les faibles nombres de REYNOLDS, cette longueur est essentiellement variable et l'on retrouve la même allure de courbe que celle que nous avions obtenue dans nos précédents travaux (réf. 4) pour les longueurs d'attachement d'un jet à une paroi. Celà confirme que ce dernier phénomène est directement lié à l'écoulement au voisinage du noyau potentiel. Or, la longueur du noyau potentiel est en général petite par rapport à la longueur développée de jet comprise entre la buse et le point d'attachement. Celà confirme donc que l'entraînement est plus important dans la région du noyau potentiel que dans la zone de jet établi.

Examinons enfin la formation des tourbillons. La solution théorique permet d'envisager soit l'apparition simultanée d'un tourbillon sur chaque rue, soit un phénomène alterné. L'expérience montre que la première configuration est celle qui apparaît le plus souvent ; la solution alternée n'apparaît pratiquement pas dans le cas du jet libre et en fait elle correspond surtout à une oscillation globale du jet. Cependant, on observe de

légers décalages dans la formation des tourbillons, ce qui est confirmé par l'étude des nombres de STROUHAL, traitée dans le paragraphe suivant. Toutefois, ce décalage est aléatoire et provoque quelquefois la disparition prématurée de certains tourbillons. Ce phénomène a aussi été noté par CRAUSSE dans l'étude de tourbillons secondaires.

IV.4. ETUDE DE LA FREQUENCE DES TOURBILLONS

Ces mesures ont été effectuées soit avec un anémomètre, soit à partir des films réalisés. Ces deux méthodes sont complémentaires. L'anémomètre permet de faire des mesures pendant une durée assez longue et fournit donc de très nombreux points de mesure, mais ne donne aucune indication qualitative. L'interprétation des résultats est donc délicate. Par contre, la seconde méthode permet de faire la liaison entre la mesure et l'observation directe de l'écoulement au moment de l'essai.

Les figures 84 et 85 donnent les variations du nombre de STROUHAL calculé à partir de la largeur de la buse, de la vitesse U_s et de la fréquence des formation des tourbillons.

Les relations (100) et (101) permettent de calculer les nombres de STROUHAL S_s et S_{As} théoriques, X_T étant fonction de la valeur initiale de l'épaisseur de quantité de mouvement et de la solution choisie. Le tableau suivant donne les valeurs de S pour les deux valeurs de θ_s correspondant aux deux largeurs de jet utilisées.

l_s	θ_s	Solution I			Solution II		
		X_T	S_s	S_{As}	X_T	S_s	S_{As}
45 mm	0,0159	0,677	0,74	0,37	0,652	0,765	0,382
97 mm	0,011	0,649	0,77	0,385	0,625	0,8	0,4

l_s	θ_s	Solution III			Solution IV		
		X_T	S_s	S_{AS}	X_T	S_s	S_{AS}
45 mm	0,0159	0,653	0,766	0,383	0,663	0,754	0,377
97mm	0,011	0,624	0,8	0,4	0,634	0,789	0,394

Les résultats obtenus par mesure directe sur les films sont représentés sur la figure 86, les points étant ou non inscrits dans un carré selon qu'ils correspondent à l'une ou l'autre des rues. La figure 87 donne les nombres de STROUHAL successifs obrenus pour 14 tourbillons consécutifs. S est alors calculé à partir du temps qui sépare le passage des tourbillons $(n-1)$ et n dans la section X = 1.

Leur formation est parfaitement symétrique et on constate cependant que les tourbillons apparaîssent assez irrégulièrement. Celà explique, compte tenu des décalages qui apparaîssent certaines fois, la relative dispersion des résultats expérimentaux. En particulier l'impossibilité de connaître l'aspect de l'écoulement au moment de la mesure, lors de l'utilisation de l'anémomètre, fait que le dépouillement ne permet pas de dissocier le fonctionnement parfaitement symétrique de l'antisymétrique. Il apparaît ainsi un nuage de points qui se situe pratiquement entre les valeurs théoriques S_s et S_{AS}. Nous remarquons toutefois que les résultats théoriques sont plus forts que les valeurs expérimentales.

IV. 5. VITESSES DE DEPLACEMENT ET DISTANCES ENTRE TOURBILLONS

L'étude directe des films nous a permis de tracer et comparer les déplacements dans le temps des tourbillons. Les points de référence sont les centres de zones tourbillonnaires apparaîssant lors de la visualisation. Les figures 88 et 89 montrent les déplacements des tourbillons successifs pour les séries 1 A 3 et 1 C 1. Afin de réunir sur un même graphe l'ensemble

des résultats d'une série, nous avons considéré que chaque tourbillon était au temps $t = 1$ dans la section $X = 1$. Les figures 90 à 98 constituent l'ensemble de tels graphes.

La relation (105) nous donne les différentes courbes théoriques $X(t)$. Nous avons uniquement représenté la courbe correspondant à la solution S_{II}. Notons cependant que les diverses solutions diffèrent très peu l'une de l'autre. Nous constatons que la théorie est correctement vérifiée par l'expérience, compte tenu du fait que la période utilisée pour le calcul de $X(t)$ est celle donnée par la relation (98) qui, nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, est légèrement différente de la valeur expérimentale moyenne.

Enfin nous donnerons les résultats concernant les distances entre tourbillons. Ces mesures ont été effectuées sur des photographies instantanées de l'écoulement. La figure 99 montre que la courbe théorique obtenue à partir de la relation (107) se place très correctement par rapport aux résultats qui représentent des moyennes des mesures expérimentales.

IV.6. CONCLUSION

L'étude qualitative a montré clairement que la zone de fluctuations de faible amplitude est suivie de formation de tourbillons discrets qui provoquent essentiellement l'entraînement du fluide ambiant. Ces tourbillons se propagent pratiquement sur les lignes correspondant aux points d'inflexion de profils de vitesse successifs. Leur vitesse de propagation, déduite de la théorie linéaire et à partir de la longueur d'onde correspondant à une "perturbation neutre", concorde bien avec les résultats expérimentaux.

Par contre, l'étude expérimentale a montré que la formation de tourbillons dans le temps est assez irrégulière du fait des déséquilibres

qui apparaissent entre les rues ou les tourbillons consécutifs eux-mêmes. Cependant la solution qui apparaît le plus souvent est l'apparition de deux tourbillons symétriques.

CHAPITRE V

- : -

RELATIONS ENTRE LES TOURBILLONS ET LE DEBIT D'ENTRAINEMENT DU JET

L'étude de la mise en mouvement du fluide ambiant sous l'influence du jet principal est à la base des recherches concernant l'attachement d'un jet à une paroi et donc la commande des modules fluidiques digitaux. Le débit de fluide entraîné par le jet est actuellement caractérisé par les paramètres expérimentaux, introduits dans les formules théoriques des profils des vitesses. Cette méthode fait donc intervenir un processus continu d'entraînement, lié au profil des vitesses moyennes.

Nous avons vu cependant que pour les nombres de REYNOLDS de nos expériences, nous pouvons définir trois zones distinctes pour le jet (paragraphe III. 1.). Si dans les zones I et III, le processus continu paraît établi, la zone II, par contre, est caractérisée par la formation et le développement des tourbillons. Ceux-ci peuvent se présenter à priori sous forme symétrique, ou sous forme alternée (antisymétrique). L'expérience montre que la formation simultanée d'un tourbillon sur chaque rue est prépondérante, c'est-à-dire que cette première géomètrie apparaît lorsque le profil des vitesses est proche du profil rectangulaire. Par contre, la forme alternée devient prépondérante lorsque le jet présente un profil des vitesses voisin de celui du jet dans la "région établie"; Cela apparaît à l'examen des résultats provenant d'une part de la mesure des fréquences sur les films, d'autre part de l'utilisation de l'anémomètre. Dans le premier cas, on obtient la fréquence de formation caractérisée par des nombres de STROUHAL correspondant à la valeur S_{As} théorique (fig. 86 et 87). Avec la seconde méthode, le film chaud placé à une distance de l'ordre de 2,5 l_0 enregistre le passage des perturbations et les figures 84 et 85 montrent que les nombres de STROUHAL obtenus sont en majorité entre les valeurs S_s et S_{As} . Cela confirme que l'aspect géomètrique des rues de tourbillons subit une évolution parallèle à celle du profil des vitesses.

Or, si l'on considère la formation d'un tourbillon, on constate qu'il s'enroule vers l'extérieur du jet. Les visualisations montrent que le processus est le suivant (fig. 101) : dans la zone I, la perturbation se

présente sous forme d'une protubérance du filet fluide issue de l'arête de la buse. Lorsque X augmente, la forme de ce filet évolue à partir du profil d'une demi période de sinusoïde de très faible valeur crête à crête, vers l'allure d'une impulsion. Pour $X = X_T$, la force antagoniste qui s'exerce sur ce filet provoque son enroulement.

Cette résistance à l'avancement est due au gradient négatif $\frac{\partial u}{\partial x}$ des vitesses dans le jet. La partie extérieure de la protubérance entame alors un processus d'enroulement qui provoque l'emprisonnement d'un certain volume du fluide ambiant.

Dans ces conditions, l'entraînement du fluide ambiant dans la zone I est très faible et le débit entraîné provient essentiellement des volumes emprisonnés par chaque tourbillon. De ce fait, la connaissance de la variation du diamètre des tourbillons et de leur fréquence de formation permet de calculer la loi de débit du jet.

Considérons donc un tourbillon qui se déplace dans la zone II, et appartienne à la rue située dans le demi-plan Y positif. Son centre est situé sur la droite.

$$Y = 0{,}034X + 0{,}5 \qquad (108)$$

lieu des points d'inflexion du profil des vitesses. De plus, sa limite extérieure est tangente à la droite :

$$Y = 0{,}5 - \frac{X}{2X_N} \qquad (109)$$

qui est la limite du noyau potentiel, ce dernier ayant une longueur X_N. Dans le paragraphe IV.3., nous avons examiné la variation de X_N en fonction du nombre de REYNOLDS et nous avons obtenu la valeur limite de 4,4 lorsque Re est suffisamment grand. Nous prendrons cette valeur : $X_N = 4{,}4$. La relation (109) s'écrit alors :

$$Y = 0{,}5 - 0{,}114X \qquad (110)$$

Dans ces conditions, le rayon r du tourbillon, dont le centre est à l'instant considéré dans la section X, s'écrit, à partir des conditions

géomètriques :

$$r = 0{,}143\,X \qquad (111)$$

Le volume par unité d'épaisseur de ce tourbillon est alors :

$$V = \pi r^2 l_s^2 = 0{,}0695\,X^2 l_s^2 \qquad (112)$$

Si n est le nombre de tourbillons qui traversent la section X pendant le temps dt, f la fréquence de formation et S le nombre de STROUHAL correspondant, le débit moyen Q_m dans la section X dû aux deux rues de tourbillons, s'écrit :

$$Q_m = \frac{2nV}{dt} = 2fV$$

soit

$$q_m = \frac{Q_m}{U_s l_s} = 0{,}139\,X^2 S \qquad (113)$$

Or, si l'on considère la limite $Y(X)$ théorique pour laquelle le débit compris entre $(-Y)$ et $(+Y)$ est égal au débit d'alimentation, on obtient la relation entre (Y) et (X) à partir de (117) :

$$3{,}53\,\frac{(Y-0{,}5)^3}{X^2} - 2{,}3\,\frac{(Y-0{,}5)^2}{X} - 0{,}5\,(Y-0{,}5) + 0{,}0367\,X = 0$$

La limite $Y(X)$ ainsi définie, est pour $X \in [0,5]$ une droite voisine du lieu des points d'inflexion du profil des vitesses, c'est-à-dire voisine du lieu des centres des tourbillons. La distance entre les deux droites est petite vis à vis du diamètre du tourbillon dans la même section. On peut donc supposer que le volume d'un de ces tourbillons comprend à parts égales, du fluide provenant du jet principal et du fluide ambiant. Le débit entraîné est alors égal à :

$$q_E = 0{,}0695\,S X^2 \qquad (114)$$

Cette relation parabolique est représentée sur la figure 102, pour les deux valeurs théoriques du nombre de STROUHAL, à savoir :

$$S_s = 0,765 \quad \text{et} \quad S_{AS} = 0,383$$

On peut cependant, comme nous l'avons montré, considérer une évolution du nombre de STROUHAL, les deux valeurs précédentes étant les valeurs limites. Nous prendrons une loi de variation linéaire le long du noyau potentiel :

$$S = - 0,087\ X + 0,765 \qquad (115)$$

Le débit entraîné s'écrit alors :

$$q_E = 0,0695\ (- 0,087\ X + 0,765)\ X^2 \qquad (116)$$

et : est représenté sur la figure 102.

Cette loi de variation implique que l'évolution entre les valeurs S_s et S_{AS} est entièrement accomplie à la fin du noyau potentiel ($X = X_N = 4,4$). La valeur ainsi obtenue pour le débit d'entraînement sera donc une valeur par défaut.

Nous pouvons comparer ces résultats à la valeur du débit entraîné, calculée avec le profil des vitesses de GOERTLER :

$$\frac{u}{U_s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2}\left(1 + erf\,\eta\right) \qquad (117)$$

La variable η est définie par : $\eta = \sigma \frac{Y'}{X'}$, σ prenant la valeur 13,5 pour obtenir la concordance avec les profils expérimentaux. Si $\mathcal{J}(\xi)$ est la courbe de GALTON définie par :

$$\mathcal{J}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\xi} e^{-z^2} dz$$

nous avons :

$$\frac{u}{U_s} = \frac{1}{2} + \mathcal{J}\left(\eta\sqrt{2}\right) \qquad (118)$$

La courbe de GALTON peut être approximée avec une erreur maximum inférieure à 2% par la relation :

$$\mathcal{J} = -0,090553\,\xi^2 + 0,426427\,\xi$$

et donc :

$$\frac{u}{U_s} = 0{,}5 \pm \left(0{,}60306\,\eta - 0{,}18111\,\eta^2\right)$$ (± selon que η est positif ou négatif)

Le débit moyen Q_{1m} dans la section X est alors

$$Q_{1m} = 2\int_{-\infty}^{+\infty} u\,dy = 2U_s l_s \frac{X}{V}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{U_s}\,d\eta$$

On obtient donc, compte tenu des relations précédentes :

$$q_{1m} = \frac{Q_{1m}}{U_s l_s} = 1 + \frac{2{,}153}{V} X$$

soit, pour le débit entraîné :

$$q_{1E} = \frac{2{,}153}{V} X \qquad (119)$$

Cette relation donne un gradient $\frac{\partial q}{\partial X}$ constant quel que soit X. Or, en fait l'entraînement n'existe pratiquement qu'à partir de l'abscisse $X = X_T$. Nous représenterons donc la relation (120) en effectuant cette translation, soit (fig. 102) :

$$q_{1E} = \frac{2{,}153}{V}\left(X - 0{,}67\right) \qquad (120)$$

Nous constatons que le calcul du débit entraîné par les volumes des tourbillons donne une bonne représentation. En effet, s'il existe un écart entre les courbes représentant les relations (116) et (120), le gradient $\frac{\partial q}{\partial X}$ est par contre très voisin.

De plus, cette méthode permet d'interpréter les phénomènes d'entraînement pour un jet dont l'axe présente une certaine courbure. L'expérience (réf. 4) montre alors que le jet s'étale moins sur le coté interne que sur la face externe. Or, si nous reprenons le processus de formation des tourbillons (fig. 101), nous voyons que le volume emprisonné par chaque tourbillon dépend de la hauteur l_b de la protubérance à la fin de la zone I.

Si l'on considère le coté externe du jet, les forces d'inertie dues

à la courbure tendent à augmenter la valeur de h . C'est l'inverse qui se produit pour la face interne. Les rayons des deux tourbillons, appartenant chacun à l'une des rues, seront différents dans une même section X. Le débit entraîné sur la face interne sera inférieur à celui correspondant à la face externe. Ce résultat correspond à l'hypothèse que SAWYER (réf. 24) introduit pour rendre compte du phénomène. Cependant, le paramètre lié au profil des vitesses est toujours empirique et ne peut être déterminé que par les conséquences de l'entraînement sur un phénomène global. La visualisation des tourbillons peut, par contre, permettre de mesurer l'évolution de leur diamètre et d'évaluer, par conséquent, les coefficients d'entraînement sur chaque face du jet.

En conclusion, nous pouvons dire que l'étude de la stabilité du jet dans la région du noyau potentiel nous permet, par l'intermédiaire de la formation et de l'évolution des tourbillons, de calculer le débit d'entraînement du jet et de considérer qualitativement l'influence sur ce paramètre de la courbure du jet. Ce dernier élément nécessite de nouveaux essais qui permettront d'évaluer quantitativement les divers coefficients d'entraînement du jet dont la connaissance est nécessaire pour l'étude théorique de l'attachement d'un jet à une paroi.

CHAPITRE VI

- : -

FONCTIONNEMENT DYNAMIQUE D'UN JET PLAN

Par fonctionnement dynamique du jet, nous entendrons tout phénomène dynamique qui intéresse le jet dans son ensemble, c'est-à-dire tel que l'intégralité de la masse du fluide formant le jet ait un mouvement d'ensemble. Nous citerons par exemple le basculement d'un module digital fluidique ou l'oscillation d'un jet débouchant face à un partiteur. De tels phénomènes sont nombreux et apparemment très différents. Notre but est donc de faire une analyse aussi large que possible des paramètres du jet qui se retrouvent dans tous ces écoulements. A partir de ces éléments, nous proposerons une méthode d'étude du comportement dynamique d'un jet plan.

VI.1. INFLUENCE DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT DU JET

Jusqu'à présent, la plupart des expérimentateurs ont considéré que la quantité de mouvement du jet était constante quelle que soit la section considérée. Or, des études récentes effectuées par FABRE (réf.25) sur un jet de rapport de forme égal à 3 (rapport de forme = épaisseur / largeur) montrent qu'en fait la quantité de mouvement décroît dans la zone de transition pour se stabiliser ensuite à environ 0,8J_{oo}, J_{oo} étant la quantité de mouvement du jet dans la section de sortie de la buse (fig. 103) De plus, lorsque le jet oscille, on constate que la courbure de l'axe du jet augmente au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la buse sans que la différence des pressions Δp , de part et d'autre du jet, subisse une telle variation. Or, on sait que la courbure dépend en particulier de Δp et de la quantité de mouvement. On peut alors expliquer l'augmentation de courbure par la diminution de la quantité de mouvement du jet.

Enfin, l'étude de la stabilité du jet et des tourbillons nous a montré que les lieux des points d'inflexion du profil des vitesses jouent un rôle particulier. Dans le dernier chapitre, nous avons montré qu'ils peuvent constituer la limite fictive entre le fluide provenant du jet principal et le fluide ambiant entraîné.

Nous proposons ainsi de ne considérer comme essentielle pour les études des mouvements d'ensemble d'un jet, que la partie de fluide comprise entre les deux lieux des points d'inflexion du profil des vitesses. En particulier, la quantité de mouvement de cette partie du fluide sera prépondérante dans toute action d'une différence de pression sur un jet plan.

Avec le profil des vitesses défini dans le paragraphe (II.1.), les lieux des points d'inflexion sont les droites d'équations :

$$Y = \pm (0{,}034X + 0{,}5) \qquad (121)$$

Les résultats du paragraphe II.3.b. nous permettent alors d'écrire, si J est la quantité de mouvement dans la section X :

$$\frac{J}{J_\infty} = \frac{3}{2} th\,\xi \left(1 - \frac{th^2\xi}{3}\right) \qquad (122)$$

avec:

$$\xi = 7{,}67 \frac{(0{,}034X + 0{,}5)}{X + 1{,}25}$$

La variation $\frac{J}{J_\infty}(X)$ ainsi obtenue est représentée sur la figure 103, ainsi que la relation d'approximation que nous appliquerons :

$$\frac{J}{J_\infty} = \frac{26}{X + 25} \qquad (123)$$

VI.2. DEVIATION STATIQUE D'UN JET PAR UNE DIFFERENCE DE PRESSION $\Delta p(x)$

Nous pouvons appliquer ce principe à la déviation d'un jet par une différence de pression $\Delta p(x)$.

A condition que le rayon de courbure soit grand vis à vis de la largeur du jet l_s, on a la relation suivante (réf. 13) entre le rayon de courbure $R(x)$, $\Delta p(x)$ et $J(x)$:

$$\frac{1}{R} = -\frac{\Delta p}{J} \qquad (124)$$

Soit, en coordonnées adimensionnelles :

$$\frac{1}{R_1} = -\alpha\left(\frac{J_\infty}{J}\right) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\Delta p l_s}{J_\infty} \qquad (125)$$

Nous appellerons "ligne de jet" le lieu des maxima des profils de vitesse et nous définirons par $y = f(x)$ son équation dans le plan (x, y) . Le rayon de courbure s'écrit alors :

$$R(x) = \frac{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Si nous développons le numérateur de cette expression en supposant $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ petit, nous obtenons :

$$R(x) = \frac{1 + 3/2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \cdots}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad (126)$$

Appliquons alors la relation 125 à la partie de jet située entre les droites définies par la relation (121) .

Si nous ne considérons que le premier terme du développement de (126) nous obtenons :

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = -\alpha(X)\,\frac{J_\infty}{J}(X)$$

soit :

$$Y = -\int_0^X \left[\alpha\,\frac{J_\infty}{J}\,dX\right] dX \qquad (127)$$

car les conditions pour X = 0 sont $dY/dX = 0$ et $Y = 0$

Si nous prenons aussi le second terme de développement, nous avons :

$$\frac{d^2Y/dX^2}{1 + \frac{3}{2}\left(\frac{dY}{dX}\right)^2} = -\alpha\,\frac{J_\infty}{J}$$

Transformons cette équation en utilisant le changement :

$$\frac{dY}{dX} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\operatorname{sh} u$$

Nous obtenons alors : $$\sqrt{\frac{2}{3}}\ \frac{du/dX}{ch u} = -\alpha \frac{J_{oo}}{J}$$

qui après intégration fournit la solution sous la forme du système d'équations:

$$\left[\begin{array}{l} Y = \int_0^X \sqrt{\frac{2}{3}}\ sh u\ dX \\ u = Log\left\{tg\left[-\frac{\sqrt{3/2}}{2}\int_0^X \alpha \frac{J_{oo}}{J}\ dX + \frac{\pi}{4}\right]\right\} \end{array}\right. \qquad (128)$$

La connaissance de $\alpha(X)$ permet donc, compte tenu de (122) ou (123), de calculer la ligne de jet $Y(X)$ correspondante.

Examinons par exemple le cas d'une répartition linéaire de la différence de pression : $\alpha(X) = aX + b$

La solution intégrale (127) donne immédiatement avec (123) :

$$Y = -\frac{X^2}{52}\left[\frac{aX^2}{6} + \frac{25a+b}{3}X + 25b\right] \qquad (129)$$

La relation (128) nécessite par contre une intégration numérique. Nous l'avons effectuée selon la méthode de SIMPSON et les résultats ainsi que ceux de la relation (129) sont représentés sur la figure 104. Nous constatons que la première approximation est correcte jusqu'à des abscisses de l'ordre de 30. Elle sera donc en général suffisamment précise pour les études des systèmes faisant intervenir les écoulements de jets, car une telle longueur libre de jet est rarement atteinte.

La répartition expérimentale $\alpha = 0,000586\ X + 0,00273$ a été obtenue en disposant sur la table T_1 une arête déversante parallèle à l'axe de la buse. La cote de calage de cette arête a été réglée de telle façon que le déversement ait lieu simultanément en fond de table et par dessus cette arête. La mesure au cathétomètre des tirants d'eau de part et d'autre du jet dans plusieurs sections X nous a permis d'obtenir la répartition $\alpha(X)$ citée ci-dessus. La ligne du jet a été tracée à partir

des profils de vitesses mesurés dans diverses sections X. La figure 104 montre que notre hypothèse concernant la "quantité de mouvement efficace" du jet est satisfaisante quant à la déviation statique du jet.

VI. 3. DYNAMIQUE DES JETS PLANS

Les phénomènes dynamiques dans les jets ou dans les écoulements du même type sont très nombreux et très divers. Nous citerons par exemple la dislocation d'un jet de révolution en gouttes provoquée par une excitation forcée et les oscillations auto-entretenues d'un jet avec écoulement ambiant de même sens, étudié par CURTET (réf. 29) ou de deux jets plans coaxiaux opposés que nous avons nous-mêmes obtenues. La diversité des phénomènes entraîne évidemment la multiplicité des paramètres pouvant intervenir et rend très délicate toute interprétation. Notre but est d'analyser les principales caractéristiques des jets que l'on peut déceler à travers les résultats obtenus dans les diverses études effectuées.

Selon que l'on considère le jet comme un mode d'écoulement particulier, ou comme un "tout", il y a deux façons d'envisager sa stabilité.

Dans le premier cas, on applique les théories que nous avons utilisées précédemment pour l'étude de la stabilité dans les zones de mélange entourant le noyau potentiel. On en déduit alors les conditions d'écoulement assurant la stabilité et les caractéristiques des perturbations. L'étude du système d'équations linéarisées nous a ainsi permis de déterminer les nombres de STROUHAL S_s et S_{As} d'un jet et nous avons montré que seul ce dernier apparaît lorsqu'on se place à une certaine distance de la buse.

Si par contre, on considère le jet comme un "tout", muni de certaines caractéristiques, telles par exemple que la loi de quantité de mouvement $J(x)$, on peut lui appliquer les principes des servomécanismes car alors on peut ignorer les phénomènes internes et ne considérer que la réponse du jet à une excitation extérieure.

Analysons maintenant les caractéristiques essentielles d'un jet lors d'un fonctionnement dynamique.

Tout d'abord, un jet se comporte comme un système non linéaire. Au voisinage de la buse, les termes non linéaires des équations générales de NAVIER-STOKES interviennent et modifient le système d'équations relatif à la perturbation. STUART (réf. 26) a par exemple montré l'influence de ces termes dans les écoulements entre deux plans et entre deux cylindres tournants. De même certains de nos essais ont montré que lorsqu'on excite le jet par un débit latéral périodique, le rapport entre l'amplitude de déplacement de la ligne de jet et l'amplitude de l'excitation est fonction de cette dernière, ce qui est caractéristique d'un système non linéaire.

Si nous considérons maintenant l'aspect de l'écoulement à un instant donné, on constate que les conditions amont influent sur la géométrie de l'écoulement. Si le nombre de REYNOLDS est suffisamment grand, les forces d'inertie sont très supérieures aux forces de frottement et on peut considérer que chaque particule est indépendante des voisines. Dans ce cas, sa trajectoire dépend à tout instant de la différence de pression extérieure qui agit sur elle à cet instant et de sa vitesse à l'instant précédent. Les caractéristiques de cette particule, à l'instant t , position et vitesse , dépendraient donc uniquement des valeurs de ces mêmes paramètres à l'instant $(t-dt)$.

Nous exprimerons celà par :

$$\begin{matrix} M(t) \\ \vec{U}(t) \end{matrix} = f\left[M(t-dt) , \vec{U}(t-dt) \right] \qquad (130)$$

et nous l'appellerons principe d' "indépendance". L'application de ce principe rend bien compte de l'écoulement lorsque cesse l'excitation extérieure du jet. Considérons par exemple un jet initialement soumis à une différence de pression $\Delta p(x)$ linéaire en fonction de X et indépendante du temps quel que soit t négatif. La ligne de jet a alors la forme de celle représentée sur la figure 104. Cette ligne représente alors la trajec-

toire de toute particule issue du centre de la buse. Si pour $t = 0$, on fait brusquement $\Delta p = 0$, chaque particule M de cette ligne se déplace alors selon la tangente à $y(x)$ avec la vitesse $\vec{U}(M)$. En particulier, la particule qui est à l'instant $t = 0$, au centre de la buse, a une vitesse dirigée suivant OX. $\vec{U}(M)$ décroissant lorsqu'on se déplace vers l'aval, la ligne passant par toutes les particules M qui appartenaient à la ligne de jet à $t = 0$, se déforme selon le processus que montre la figure 105. Ce processus rend bien compte du phénomène physique et nous avons pu le vérifier expérimentalement par visualisation. Celà correspond aussi à la forme des lignes de jet que l'on rencontre dans l'oscillation d'un jet autour d'un partiteur (fig. 100). Toutefois le principe d'indépendance est en défaut lorsque le jet est excité.

Nous en venons ainsi à la troisième propriété principale de la dynamique des jets, à savoir que ceux-ci se comportent comme des systèmes faisant apparaître des résonnances. Ce fait est montré par de nombreux et très différents phénomènes. Citons les travaux de LAZAREV (réf. 27) qui a montré que la dislocation d'un jet en gouttes est très rapide si la fréquence d'excitation est :

$$f_n = \frac{U}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{2\left(1+\sqrt{\frac{\eta n^2}{2\rho a}}\right)}}$$

a étant le rayon du jet, η sa viscosité, ρ sa masse volumique, α la tension superficielle et f_n sa fréquence propre. On retrouve ainsi la forme $f = \frac{U}{L} k$ (L étant une dimension géomètrique du jet) que l'on a obtenu pour les fréquences des perturbations dans les zones de mélange. Nous citerons ensuite la variation de la fréquence des oscillations de deux jets plans coaxiaux opposés (fig. 106). Ce phénomène est comparable à des battements provenant de la combinaison des deux fréquences propres des jets. Nous donnerons enfin les résultats concernant l'amplitude de déplacement de la ligne de jet dans le cas d'oscillations du jet autour d'un partiteur. La visualisation de cette ligne sur table à eau

et la mesure de la fréquence nous a permis d'obtenir la courbe représentant la variation de l'amplitude A en fonction de la vitesse U_s du jet, la distance buse-partiteur étant fixe (fig. 107). Nous constatons que cette amplitude présente une succession de maxima et minima, les premiers montrant l'existence de fréquences de résonnance. Or, l'application d'une relation du type (130) liée au principe d'équivalence ne permet pas d'expliquer l'existence d'une fréquence de résonnance. De plus, si nous considérons encore l'oscillation du jet autour du partiteur, un tel principe lierait directement la fréquence au temps de parcours d'une particule allant de la buse jusqu'au partiteur, sans faire intervenir la largeur du jet. De plus, elle n'autorise aucune influence directe de l'écoulement aval sur la particule, sinon par l'intermédiaire de la propagation à contre courant des ondes de pression. Or, ces deux faits sont infirmés par l'expérience : la fréquence dépend à la fois de U_s et de l_s et toute particule est influencée par celles qui la précèdent. Ainsi, dans son étude théorique de ces oscillations, NYBORG (réf. 28) a montré qu'en supposant que l'accélération latérale $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ d'une particule M ne dépend que des conditions aval (distance entre M et le partiteur et ordonnée y de la ligne de jet dans la section de l'arête) on peut obtenir une bonne représentation des divers aspects de la ligne de jet pendant l'oscillation. Notons toutefois que pour résoudre l'équation intégrale obtenue, NYBORG choisit une forme très simple de la dépendance de $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ par rapport aux conditions aval.

L'analyse que nous venons d'effectuer montre la complexité des problèmes faisant intervenir un fonctionnement dynamique des jets. Il apparaît cependant que lorsque le jet est excité, les deux paramètres sont d'une part la résonnance et d'autre part l'influence des conditions aval.

Nous proposons ainsi de considérer le jet comme "un tout" ayant des caractéristiques bien définies et de lui appliquer alors les méthodes utilisées dans l'étude des vibrations des lames flexibles.

Cette méthode nous a permis dans nos précédents travaux (réf. 4) d'obtenir à partir d'une équation des couples très simples une pulsation propre du jet au voisinage de la buse égale à :

$$\omega_n = \sqrt{6}\ \frac{U_s}{l_s}$$

soit un nombre de STROUHAL :

$$S = \frac{\omega_n\, l_s}{2\pi\, U_s} = 0{,}39$$

L'étude théorique d'une perturbation dans cette même zone nous a donné : $S_{As} = 0,383$, ce qui confirme qu'il y a une relation directe entre les caractéristiques ponctuelles de l'écoulement et les propriétés globales du jet.

On peut alors établir un parallèle entre le jet et une lame encastrée à l'une de ses extrémités. Ainsi, selon les méthodes exposées par TIMOSHENKO (réf. 30), on peut tenir compte de l'inertie du jet en imaginant que celle-ci crée une différence de pression variable selon l'abscisse (principe de d'ALEMBERT) et imposer par exemple à la ligne de jet une certaine loi d'amplitude dans une section donnée (section qui passe par l'arête du partiteur par exemple). En effet, comme l'a supposé NYBORG dans son étude théorique, ce paramètre paraît fondamental pour le phénomène d' "edge-tone". En fait, si nous examinons la figure 107, nous voyons que le saut de fréquence se produit pour un minimum de l'amplitude de déplacement de la ligne de jet. Celà signifie que pour que le système puisse présenter des oscillations stables, il faut qu'au moins une certaine partie du jet passe alternativement de part et d'autre du partiteur. Les études effectuées par SHIELDS et KARAMCHETI (réf. 31) montrent d'ailleurs que cette partie pourrait correspondre avec la partie de jet que nous avons considérée comme prépondérante dans la dynamique des jets.

Nous nous proposons de développer, aussi bien du point de vue théorique qu'expérimental, la méthode exposée ci-dessus, car elle permet de tenir compte à la fois des caractéristiques globales du jet et des conditions aval. Nous espérons obtenir ainsi les divers modes possibles d'oscil-

lations d'un jet en présence, soit d'un partiteur, soit d'un autre écoulement, qu'il soit de même sens ou opposé. Notons toutefois que cette méthode ne nous permettra pas à priori de déterminer les critères de mise en état d'oscillation, ces paramètres étant liés au caractère non linéaire d'un jet.

CHAPITRE VII

- : -

CONCLUSION

L'étude de l'attachement d'un jet à une paroi et du comportement dynamique d'un tel écoulement nous a amenés à considérer la stabilité d'un jet à profil initial uniforme. Ce dernier est pratiquement celui qui apparaît dans tous les modules fluidiques qui fonctionnent avec des nombres de REYNOLDS de quelques milliers.

Nous avons tout d'abord considéré l'écoulement dans les zones de mélange entourant le noyau potentiel. A partir d'une définition approchée du profil des vitesses dans cette région, nous avons appliqué la méthode des petites perturbations aux équations de NAVIER-STOKES linéarisées, en conservant les termes provenant des dérivées de la vitesse par rapport à l'abscisse X. Ceci nous a permis de tenir compte de ces derniers termes en considérant un jet fictif dont le profil quel que soit X est le profil $\vec{U}(X_i)$ du jet réel dans la section $X = X_i$ et en attribuant les résultats obtenus au jet réel dans cette même section. La variation de la longueur d'onde "neutre", en fonction de X, est déduite des équations obtenues auxquelles on joint les conditions aux limites. Cette loi de variation présente pour une certaine valeur $X = X_c$ un changement de nature et la variation linéaire devient alors du type exponentiel. Nous interprétons celà comme une modification de l'écoulement et nous obtenons ainsi l'abscisse de formation X_T des tourbillons dont l'expérience prouve l'existence. Ces tourbillons peuvent à priori former soit deux rues symétriques par rapport à l'axe de la buse, soit deux ruesde tourbillons alternées. Les résultats expérimentaux obtenus sur table à eau montrent que la géométrie symétrique est prépondérante dans la zone du jet telle que le profil transversal des vitesses se rapproche d'un profil uniforme. Par contre, la solution des tourbillons alternés se manifeste lorsque le profil des vitesses tend vers celui d'un jet idéal.

A partir de la longueur d'onde "neutre" ainsi calculée, on détermine la loi temporelle de déplacement des tourbillons, leur fréquence et la variation de la distance entre deux tourbillons consécutifs. Les résultats théoriques montrent une bonne concordance avec les mesures expéri-

mentales. La connaissance de ces paramètres nous a permis d'étudier qualitativement et quantitativement le débit de fluide ambiant entraîné par le jet dans la région du noyau potentiel, entraînement dû essentiellement au volume du fluide emprisonné par chaque tourbillon lors de sa formation.

Enfin, le dernier chapitre est consacré à une analyse de divers phénomènes faisant intervenir un fonctionnement dynamique du jet. La considération de paramètres tels que la variation de quantité de mouvement ou l'existence dans le comportement du jet de non linéarité et de phénomènes de résonance, nous a amené à proposer une méthode originale pour l'étude des propriétés dynamiques du jet. Celui-ci se comporte vis à vis des influences externes comme un système unique possédant des caractéristiques propres invariantes dans le temps. Cette méthode permet en particulier d'envisager les phénomènes de résonance et l'influence des conditions aval, mais laisse aussi la possibilité d'introduire des paramètres caractéristiques des non linéarités du système.

Il semble en effet que l'étude de la stabilité hydrodynamique de l'écoulement ne puisse permettre la détermination des paramètres caractéristiques de la dynamique des jets dont la complexité est évidente lorsqu'on considère le nombre et la diversité des phénomènes qui la font intervenir. L'analyse que nous avons faite et la méthode proposée nécessitent des développements théoriques aussi bien qu'expérimentaux très importants. Nous pensons en particulier que dans l'optique de la méthode envisagée, les types de non linéarité que l'on peut attribuer à un jet, ainsi que l'étude de la réponse en fréquence du jet méritent une attention toute particulière. Nous nous proposons de continuer nos recherches dans cette voie afin de pouvoir traiter les intéractions de jet comme des actions mutuelles entre des systèmes définis à priori.

REFERENCES

1. CHANAUD, R, D et POWELL, A

"Experiments concerning the sound sensitivity jets"
The Journal of the Acoustical Society of America - Vol. 34 n° 7 - Juillet 1962

2. WEINGER, S, D,

"The effect of sound on a reattaching jet at low Reynolds numbers"
Proceedings of the fluid amplification Symposium - HDL - Washington - Octobre 1965

3. ROFFMAN, G, L et TODA, K,

"A discussion of the effects of sound on jets and flueric devices"
ASME paper n° 69 - Vibr. 3 - HDL - USA (Mars-Avril 1969)

4. FONADE, C,

"Contribution à l'étude d'un jet en milieu confiné"
Thèse de Doctorat de spécialité-Faculté des Sciences - Université de Toulouse - Octobre 1967

5. MARTINEZ, E,

"On mass entrainment by jets"
Phase I : "Preliminary investigations " (juin 1966) Rapport AFOSR 66-0643
Phase II : "The effect of sound on jets" (janvier 1967)
Rapport AFOSR 67-0337
Air Office of Scientific Research - Astromechanics Reserch Division -

6. ABRAMOVICH, G,N,

"The theory of turbulent jets"

MIT Press - Cambridge - Massachussetts

7. CRAUSSE, M,E,

"Contribution à l'étude expérimentale de phénomènes transitoires et de phénomènes périodiques se produisant dans les liquides en mouvement"

Thèse de Doctorat ès Sciences Physiques - Faculté des Sciences Université de Toulouse - Octobre 1936

8. SATO, H,

"The stability and transition of a two-dimensional jet"

Journal of Fluid Mechanics - Vol. 7 - 1960 pp 53-80

9. SATO, H,

"Expérimental investigation on the transition of laminar separated layer"

Journal of the Physical Society of Japan - Vol. 11 n° 6 Juin 1956

10. ESCANDE, L,

"Hydraulique générale"

Tome I - Editions Privat - Toulouse - 1947

11. TOLLMIEN, W,

"Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindig keitswerteklangen"

Nachr. ges. Wiss. Gettingen - Math - Phys- Klasse (1935)

12. HOLLINGDALE, S,H,

"Stability and configurations of the wakes produced by solid bodies moving through fluids"

Phil - Mag - VII, 29, (1940)

13. SCHLICHTING, H,

"Boundary layer theory" Mc - Graw - Hill Co. 1960

14. SQUIRE, H, B,

"On the stability of three dimensional distribution of viscous flow between parallel walls"

Proc. Roy. Soc. A, 142 (1933)

15. LESSEN, H, et FOX, J, A,

"The stability of boundary layer type flows with infinite boundary conditions"

50 Jahre Grenzschichtforshung

Friedr. Vieweg et Sohn - Braunschweig (1955)

16. CURLE, N,

"On hydrodynamic stability in unlimited fields of viscous flow"

Proc. Roy. Soc. A - 238 - p 489 (1957)

17. TATSUMI, T, et KAKUTANI, T,

"The stability of a two dimensional laminar jet"

Journal of Fluid Mechanics - Vol, 4 - p. 261 (1958)

18. HOWARD, L, N,

"Hydrodynamics stability of a jet"

Journal Math. Phys. 37 - p. 283 (1958)

19. LIN, C, C,

"The theory of hydrodynamic stability"

Cambridge University Press (1966)

20. SAVIC, P,

"On acousticelly effective vortex motion in gaseous jets"

Phil. Mag. Tome 32 p. 245 (1941)

21. SAVIC, P, et MURPHY, J, W,

"The symmetrical vortex street in sound sensitive plane jets"

Phil. Mag. Tome 34 p. 139 (1943)

22. SATO, H, et SAKAO, F,
"An experimental investigation of the instability of a two dimensional jet at low Reynolds numbers"
Journal of Fluid Mechanics - Vol. 20 - Part. 2 - Octobre 1964

23. SNEDDON, I, N,
"Functional Analysis"
Reports on Progress Physics

24. SAWYER, R, A,
"Two- dimensional reattaching jet flows including the effets of curvature on entrainment"
Journal of Fluid Mechanics - Vol. 17 (1963)

25. DAT, J, et FABRE, J,
"Détermination des profils des vitesses d'un jet plan dans la région intermédiaire - Application au calcul du gain d'un amplificateur fluide proportionnel"
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Paris
t. 270 - Série A p. 206 (Janvier 1970)

26. STUART, J, T,
"On the non linear mechanics of hydrodynamic stability"
Journal of Fluid Mechanics tome 4 pp. 1-21 (1958)

27. LAZAREV, G, S,
"Influence des vibrations forcées sur la dislocation d'un jet"
Izvest. Vyssh. uchebn. Zaved. Mash - str. URSS n° 6
(1966) pp. 72-77

28. NYBORG, W, L,
"Self Maintained oscillations in a jet-edge systèms"
Journal of the Acoustical Society of America - Vol 26 n° 2
(Mars 1954)

29. CURTET, R,

"Sur l'écoulement d'un jet entre parois"

Publ. Scient. et Techn. du Ministère de l'Air n° 359 (1960)

30. TIMOSHENKO, S,

"Vibration problems in engineering"

3ème édition - Van Nostrand Company (janvier 1955)

31. SHIELDS, W, L, et KARAMCHETI, K,

"An experimental investigation of the edge-tone flow field"

Department of Aeronautics and Astronautics - Stanford University - Stanford Californie - SUDAAR n° 304 - Février 1967

+ Exp. realisées(Eau)
· Exp. de Bourque-Newman(Air)
▲ Exp. de Sawyer(Air)

paroi parallèle à l'axe de la buse

$\mathcal{R}_{ls} > 8000$

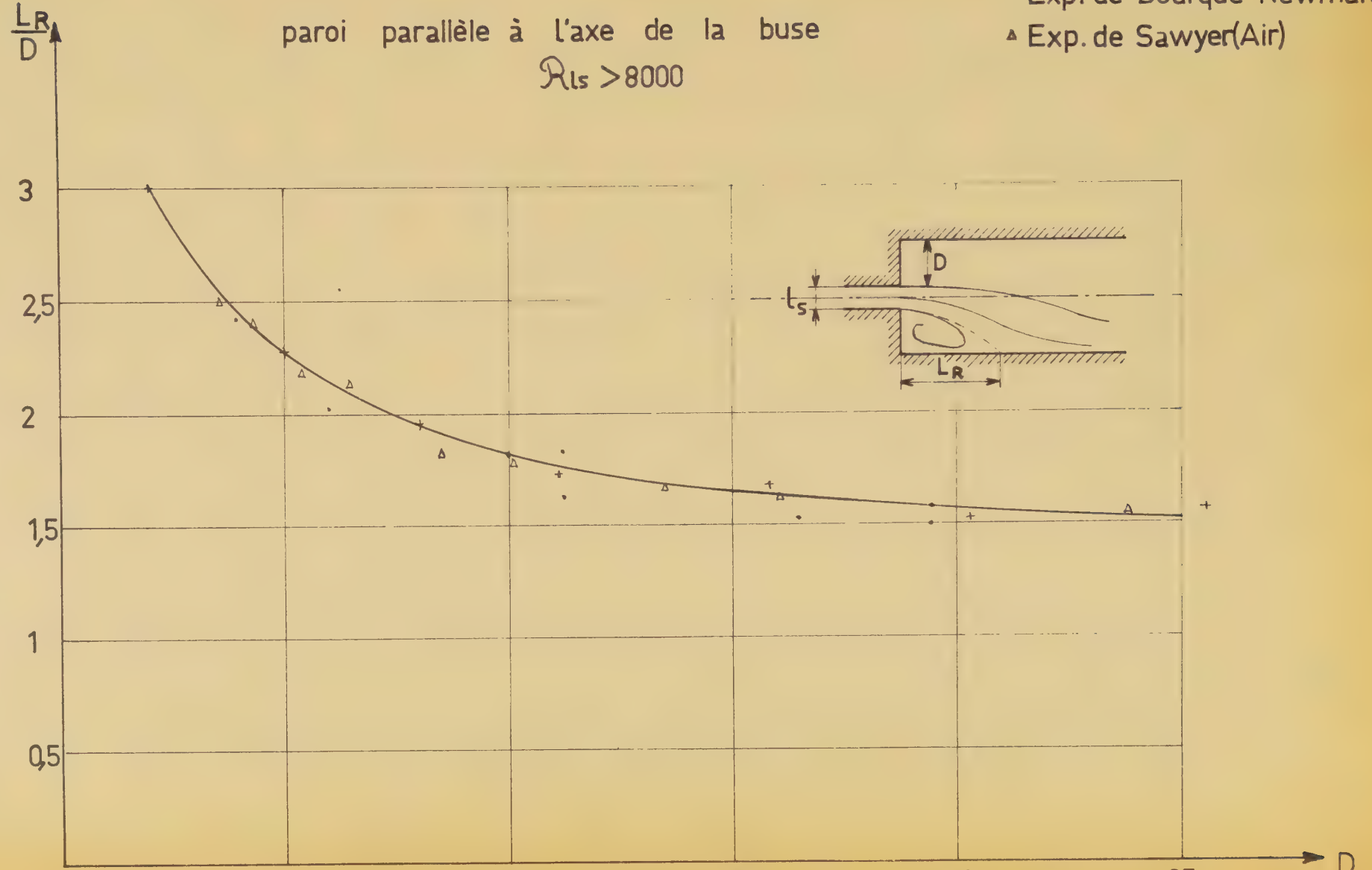
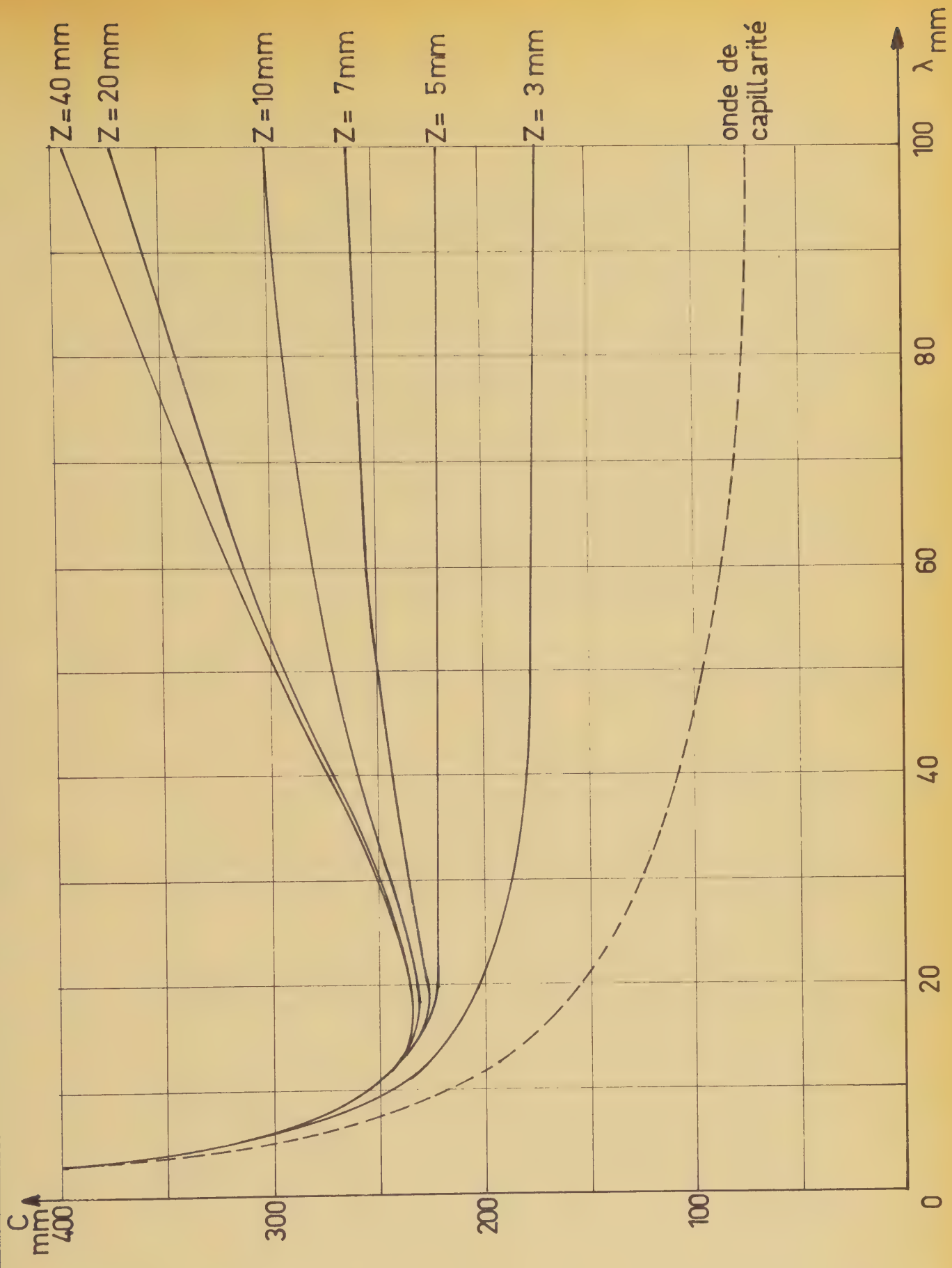


Fig.1



Célérité des ondes de gravité et de capillarité à la surface de l'eau

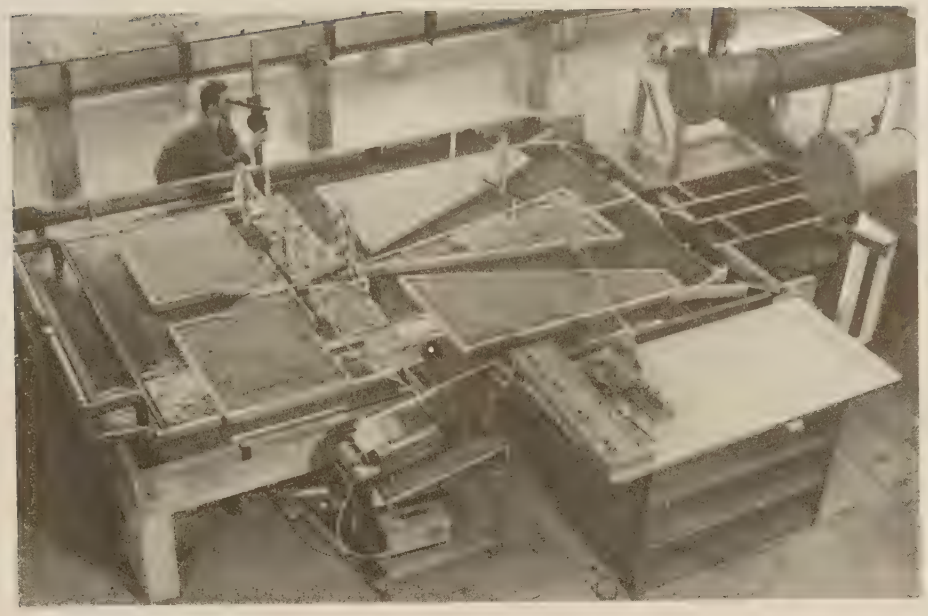
Fig.2

Echelle : 0,06

Cotes en mm

Relevé des cotes de la dalle T4

Fig. 3



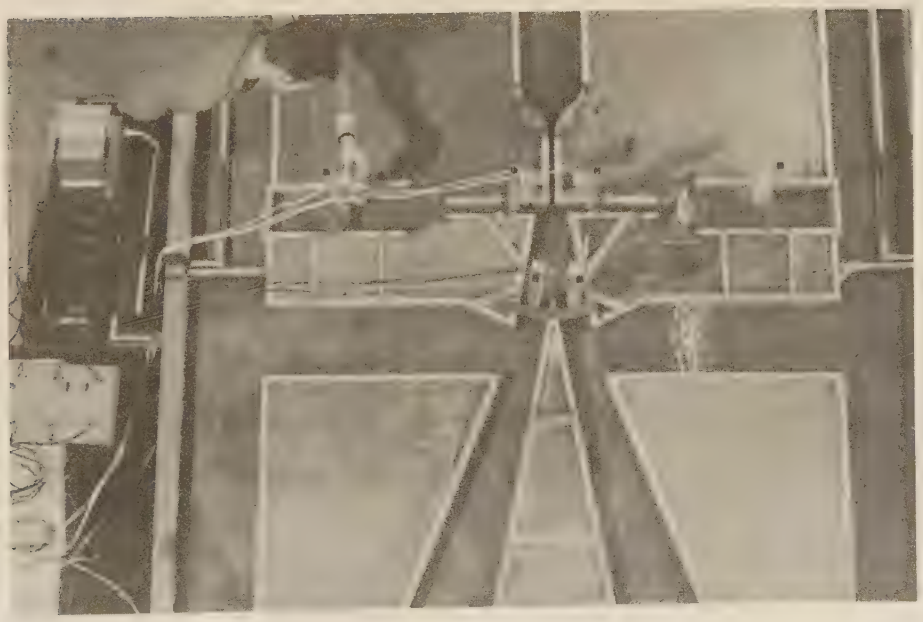
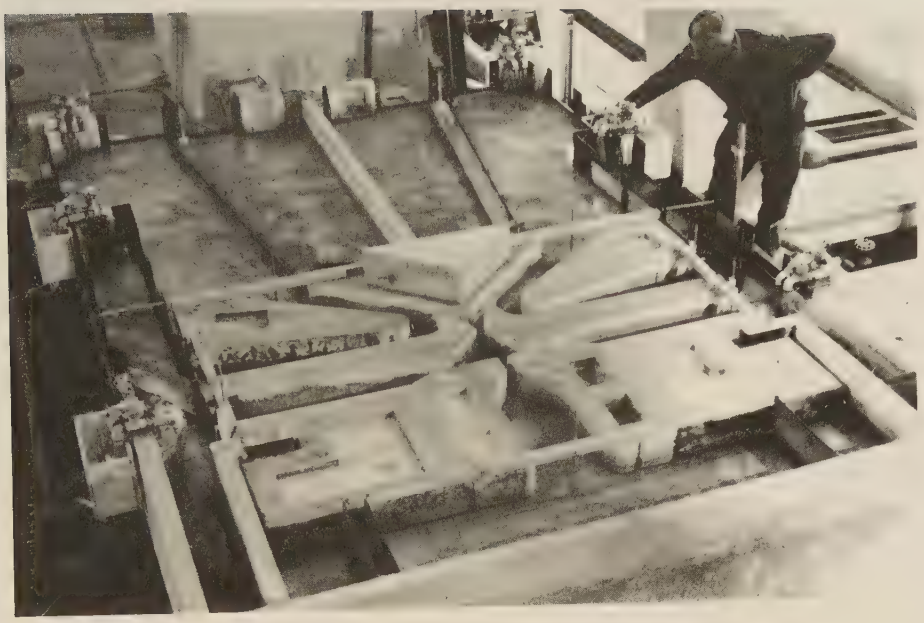


Fig.4



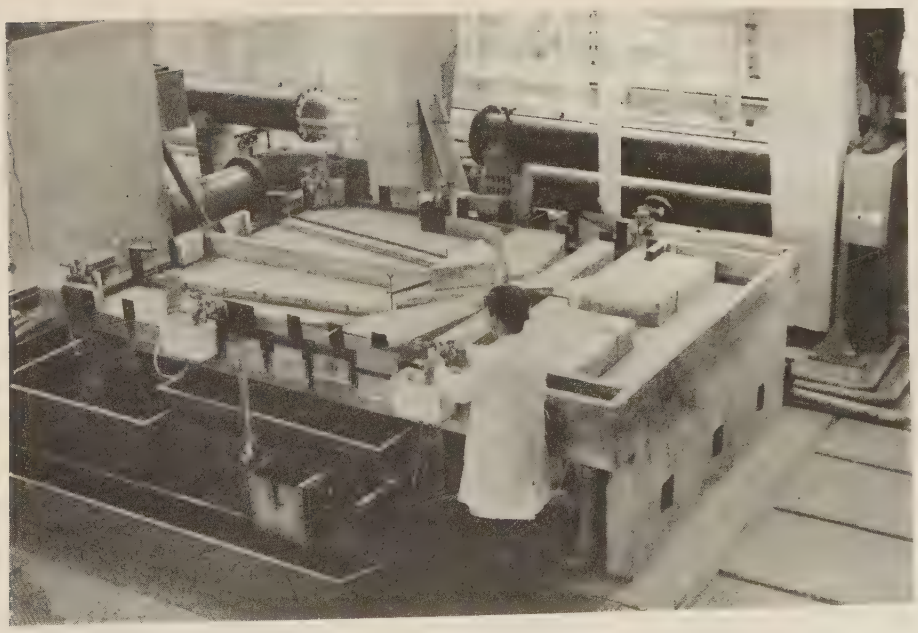


Fig.5

Fig.6

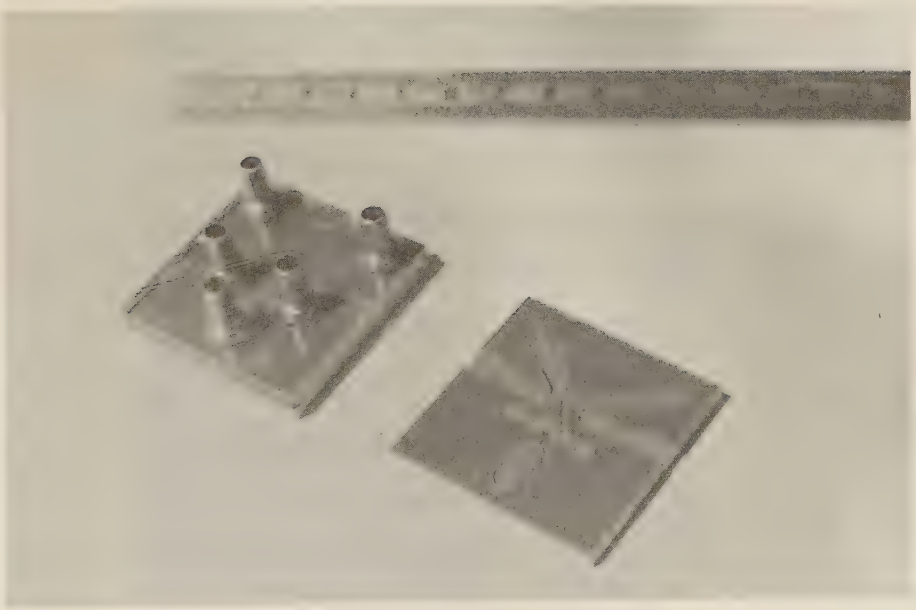


Fig.7

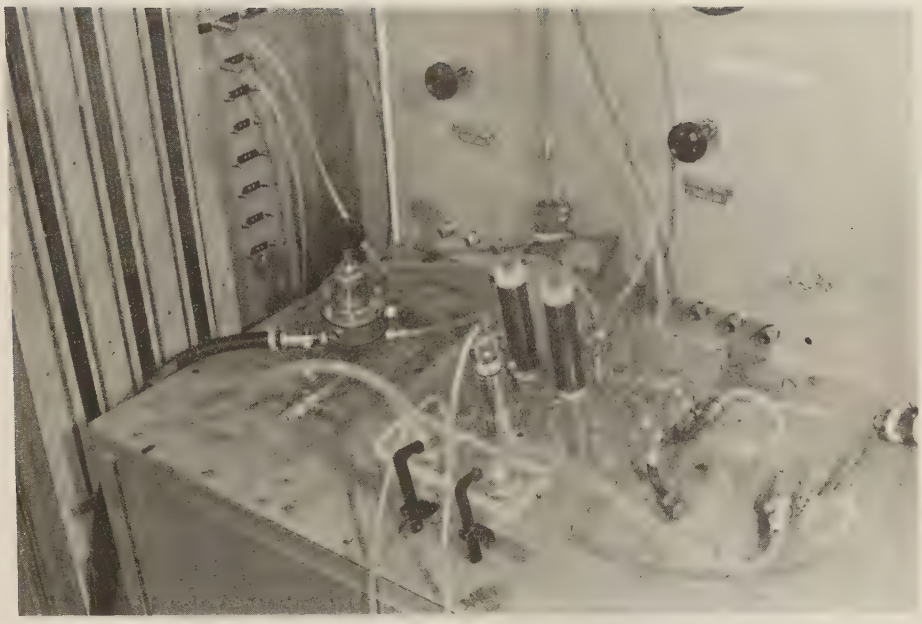


Fig.8

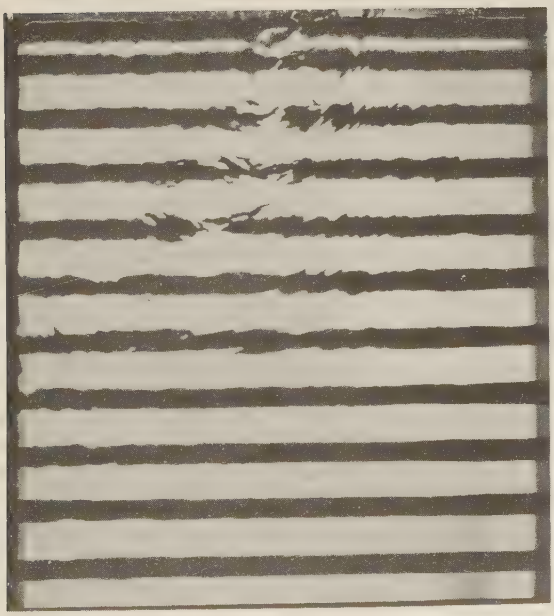


Fig.9

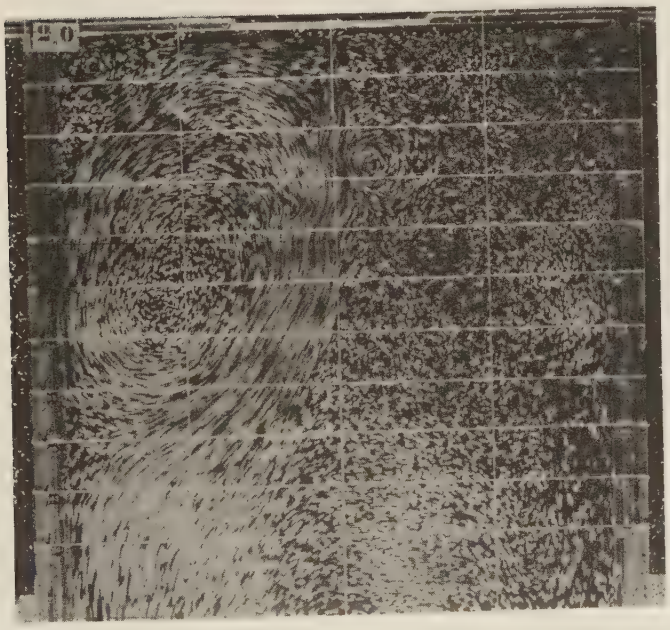


Fig.10

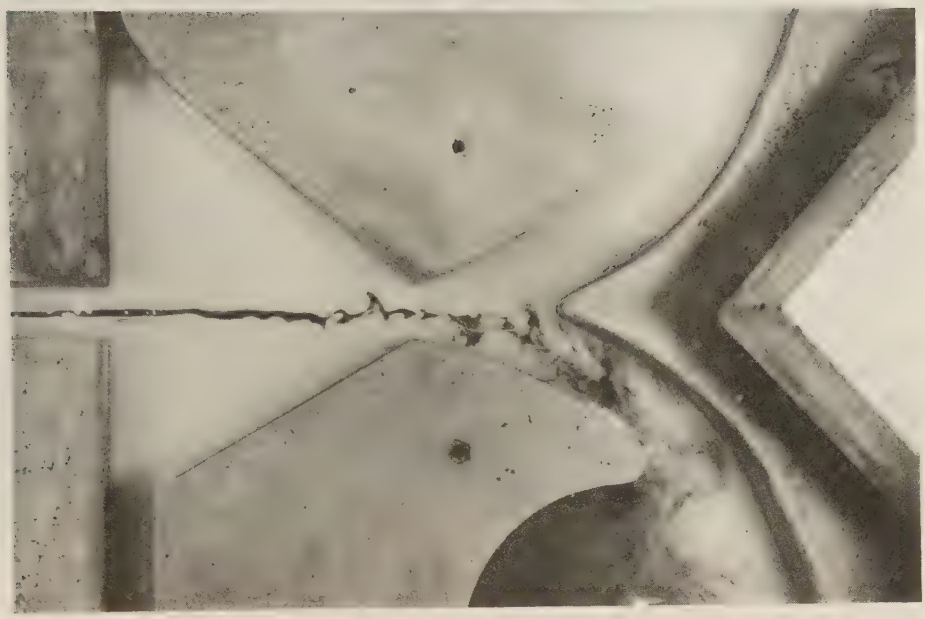
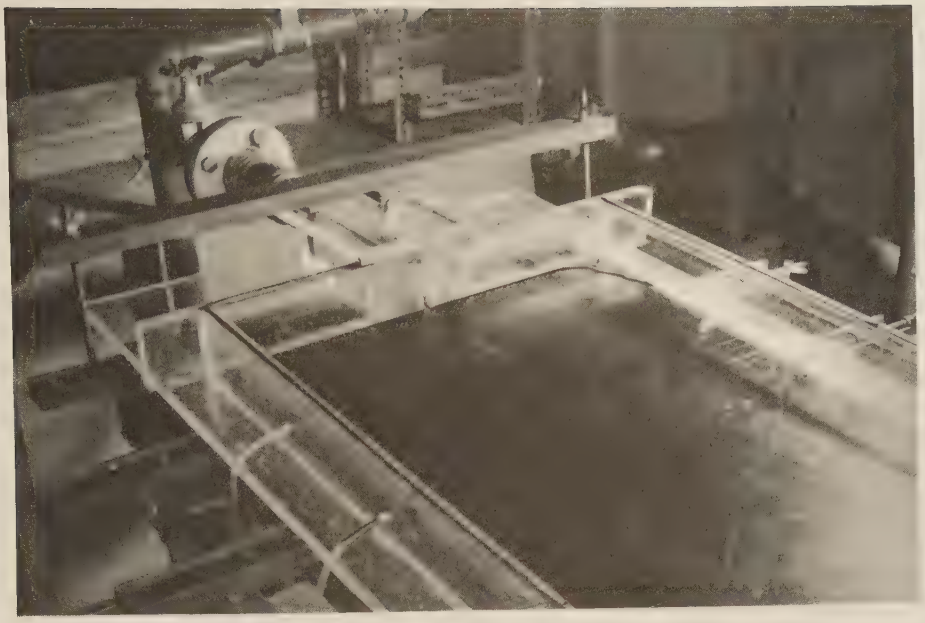


Fig.11



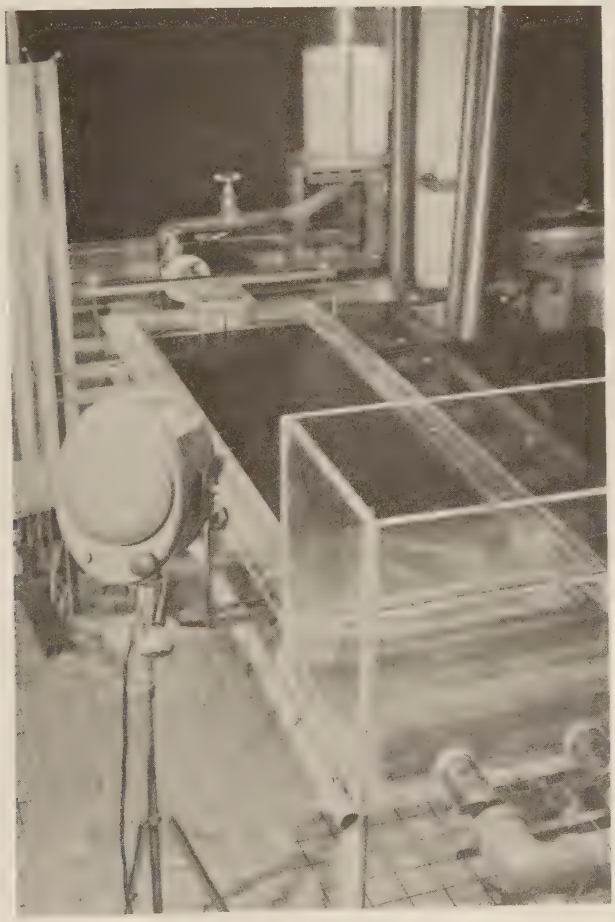


Fig.12

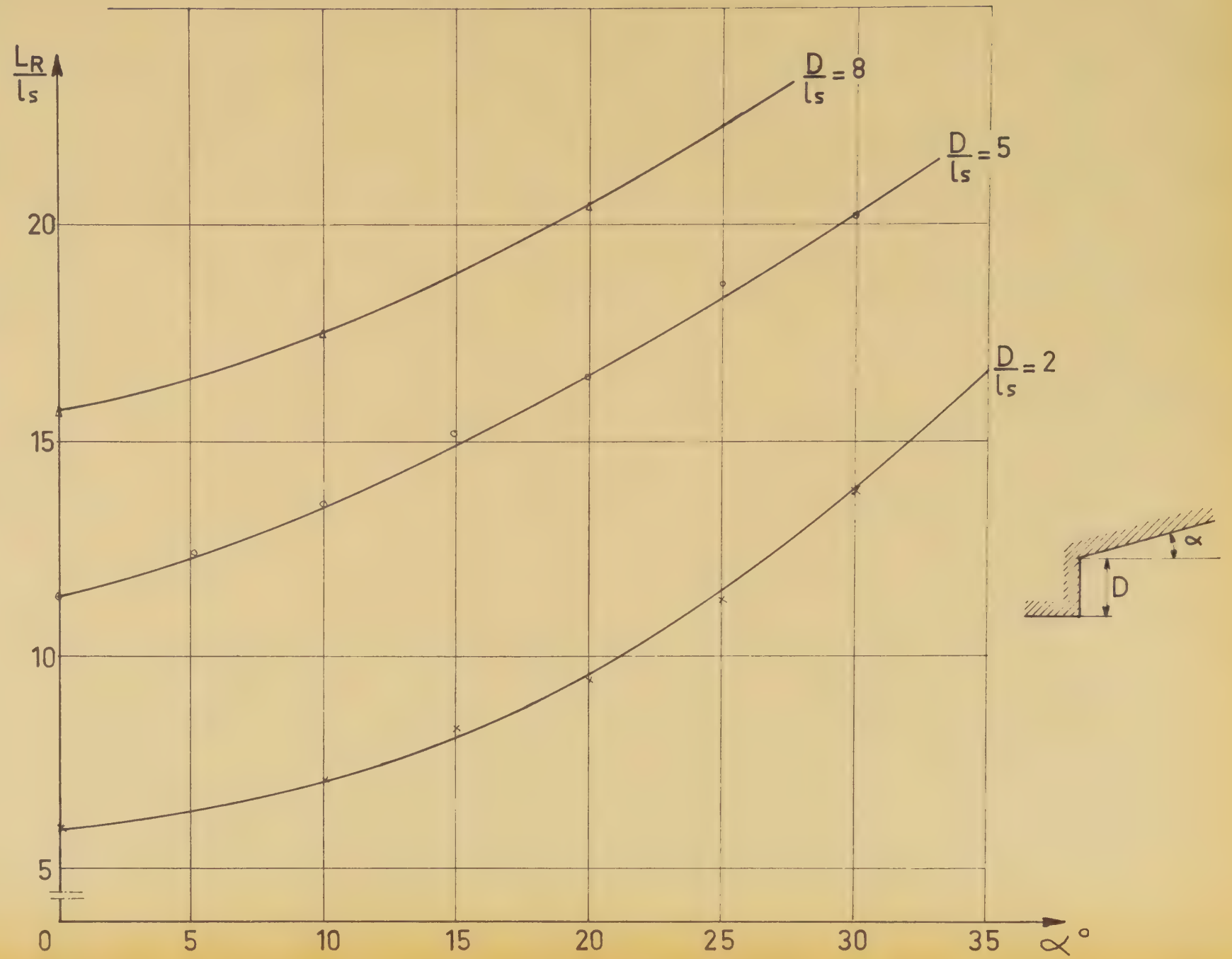

$\frac{L_R}{l_s}$
$\frac{D}{l_s} = 8$
$\frac{D}{l_s} = 5$
$\frac{D}{l_s} = 2$
20
15
10
5
0
5
10
15
20
25
30
35
$\alpha°$
α
D

Fig.13

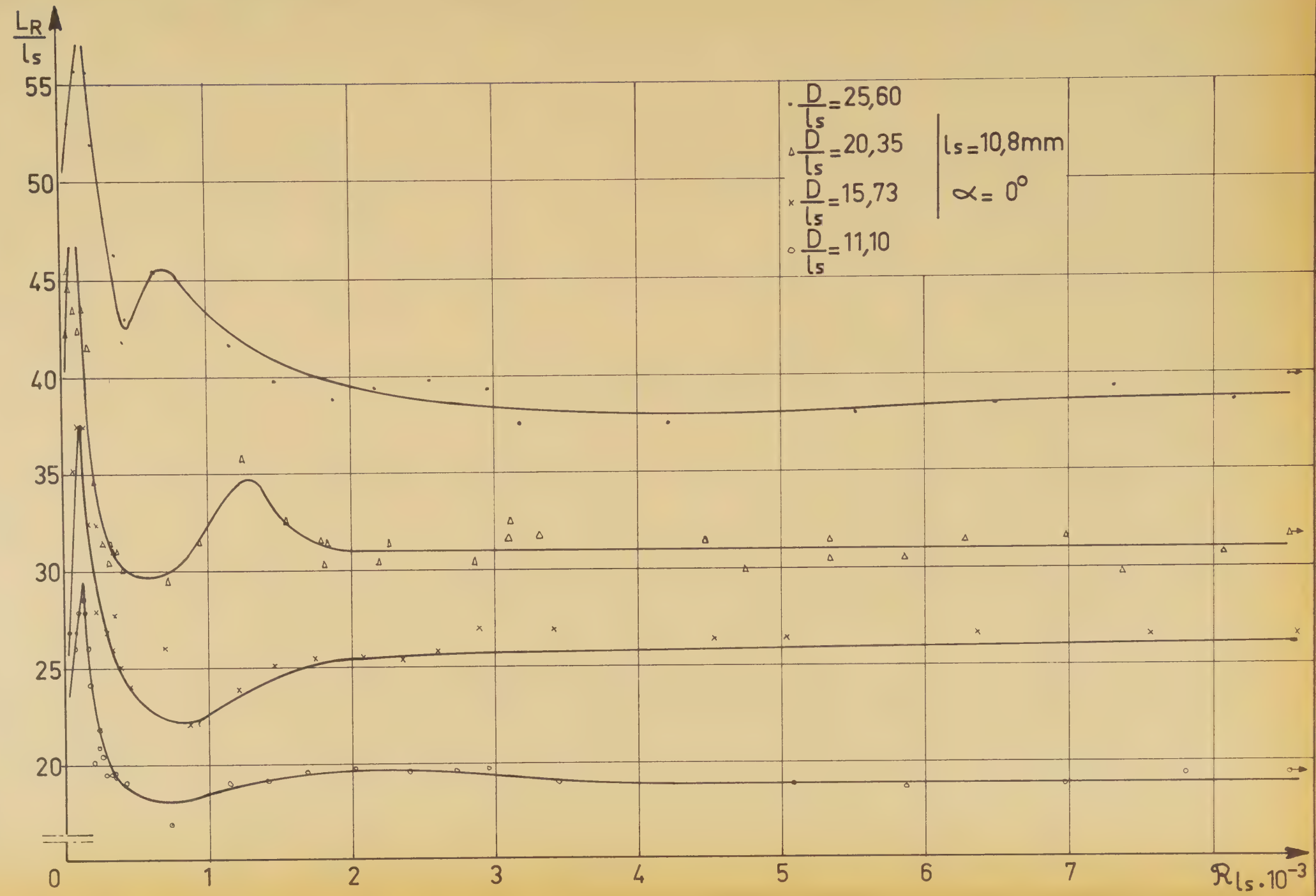

$\frac{L_R}{l_s}$
55
50
45
40
35
30
25
20
0
1
2
3
4
5
6
7
$\mathcal{R}_{l_s} \cdot 10^{-3}$
$\frac{D}{l_s} = 25{,}60$
$\frac{D}{l_s} = 20{,}35$
$\frac{D}{l_s} = 15{,}73$
$\frac{D}{l_s} = 11{,}10$
$l_s = 10{,}8\,mm$
$\alpha = 0°$

Fig. 14

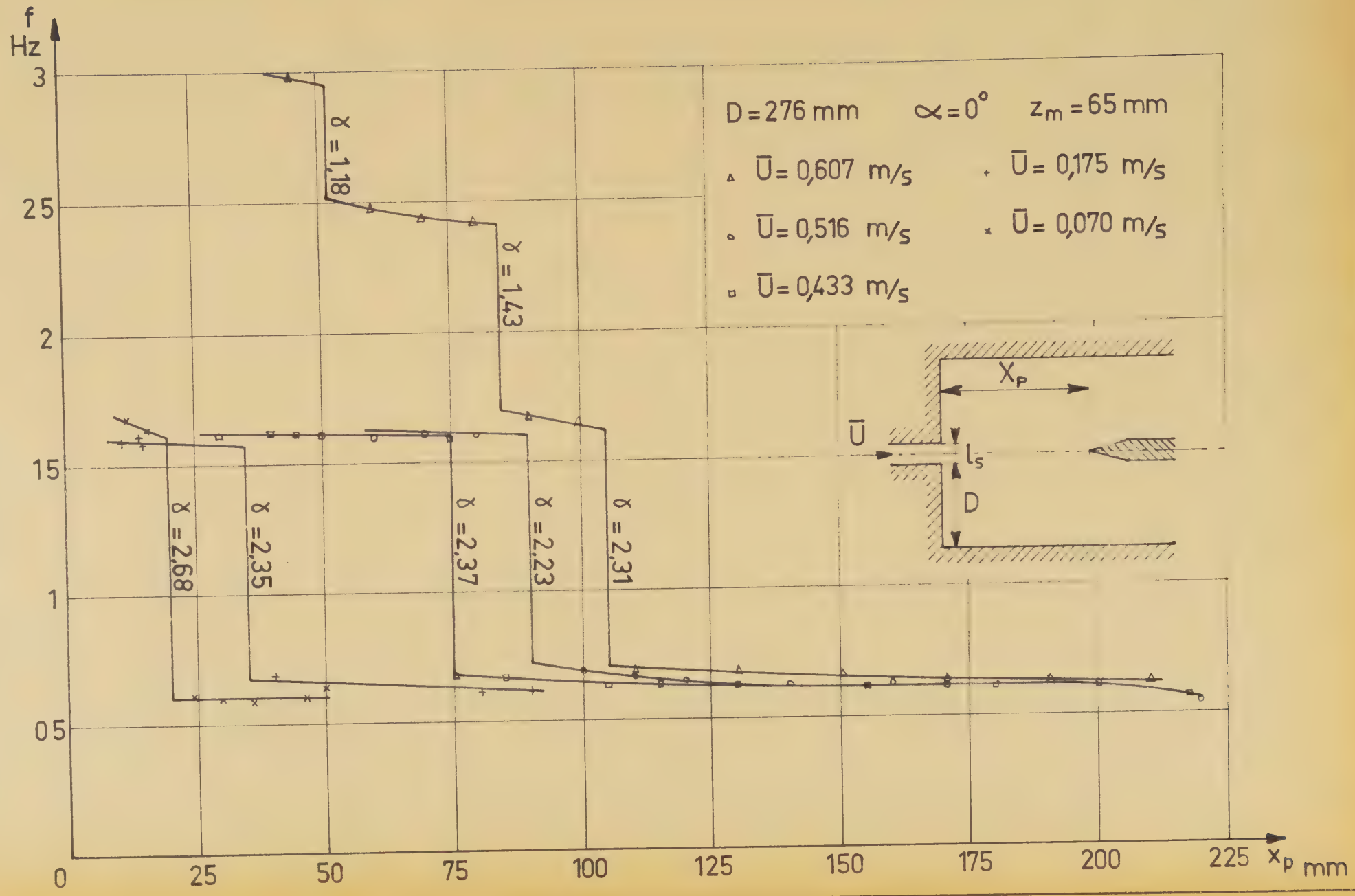

f
Hz
3
25
2
15
1
05
0
25
50
75
100
125
150
175
200
225
x_p mm
D = 276 mm
$\alpha = 0°$
$z_m = 65$ mm
$\bar{U} = 0{,}607$ m/s
$\bar{U} = 0{,}516$ m/s
$\bar{U} = 0{,}433$ m/s
$\bar{U} = 0{,}175$ m/s
$\bar{U} = 0{,}070$ m/s
$\gamma = 1{,}18$
$\gamma = 1{,}43$
$\gamma = 2{,}68$
$\gamma = 2{,}35$
$\gamma = 2{,}37$
$\gamma = 2{,}23$
$\gamma = 2{,}31$
X_p
$\bar{U}$
l_s
D

Fig.15

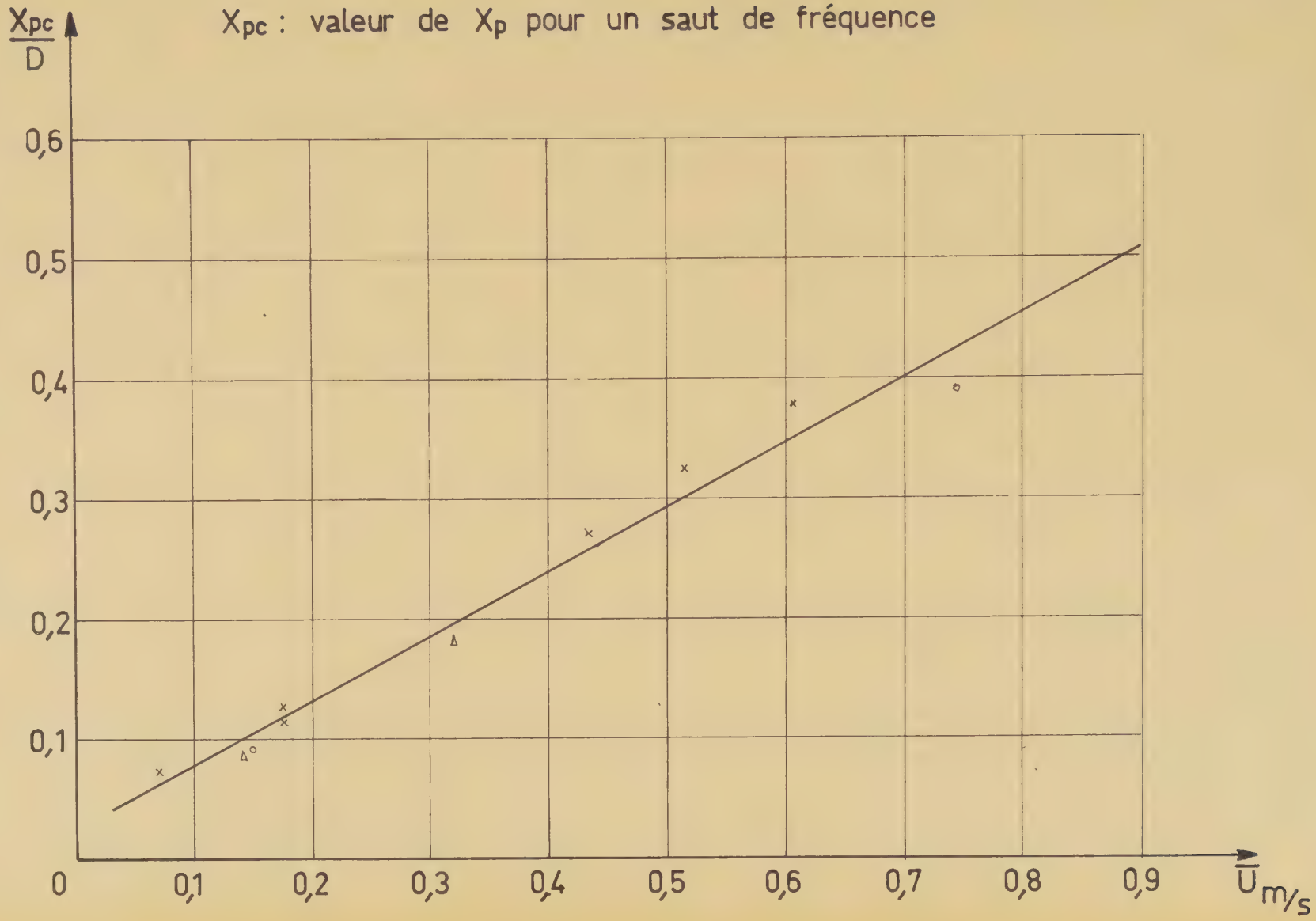
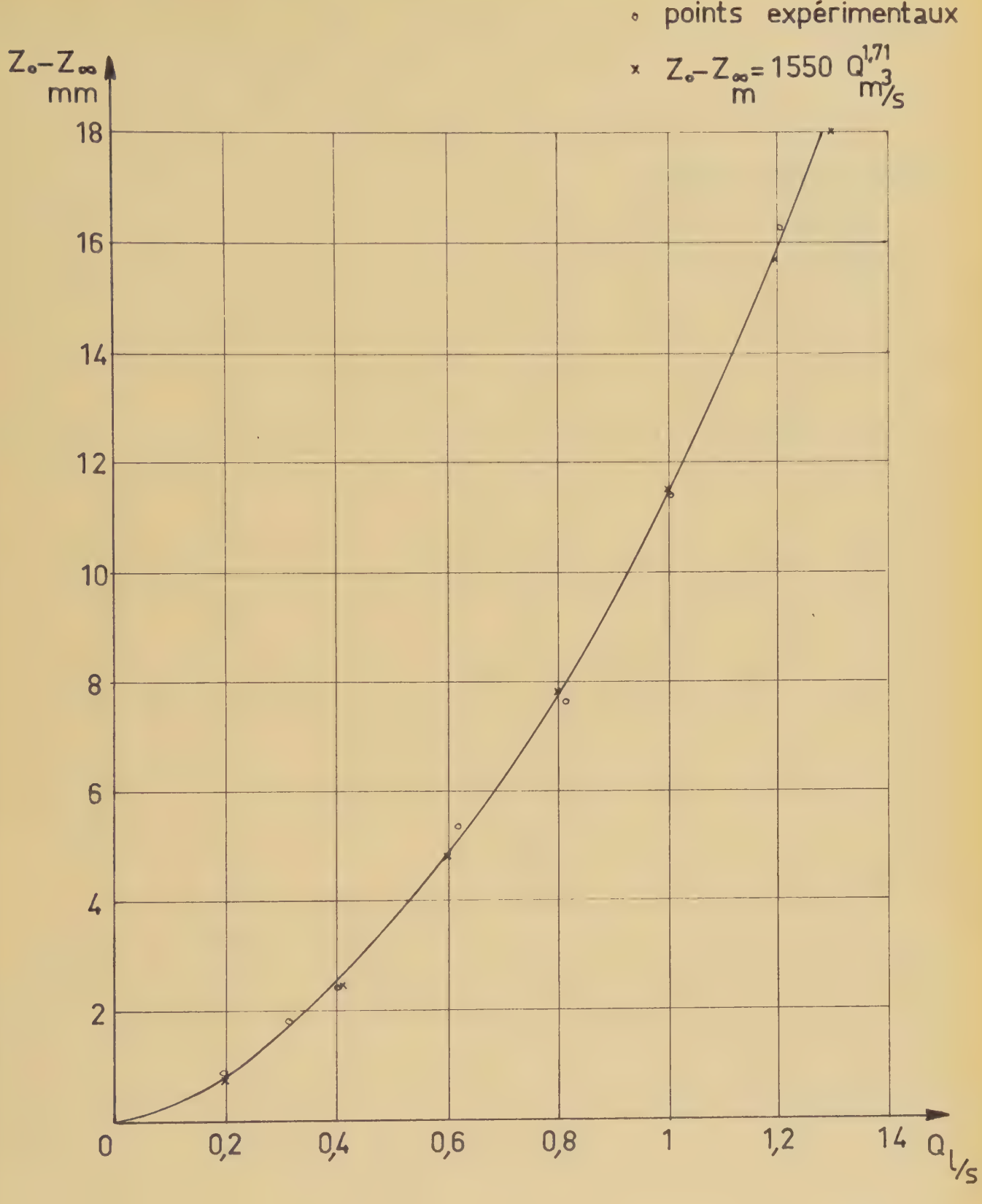

X_{pc} : valeur de X_p pour un saut de fréquence
$\frac{X_{pc}}{D}$
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
$\bar{U}$ m/s

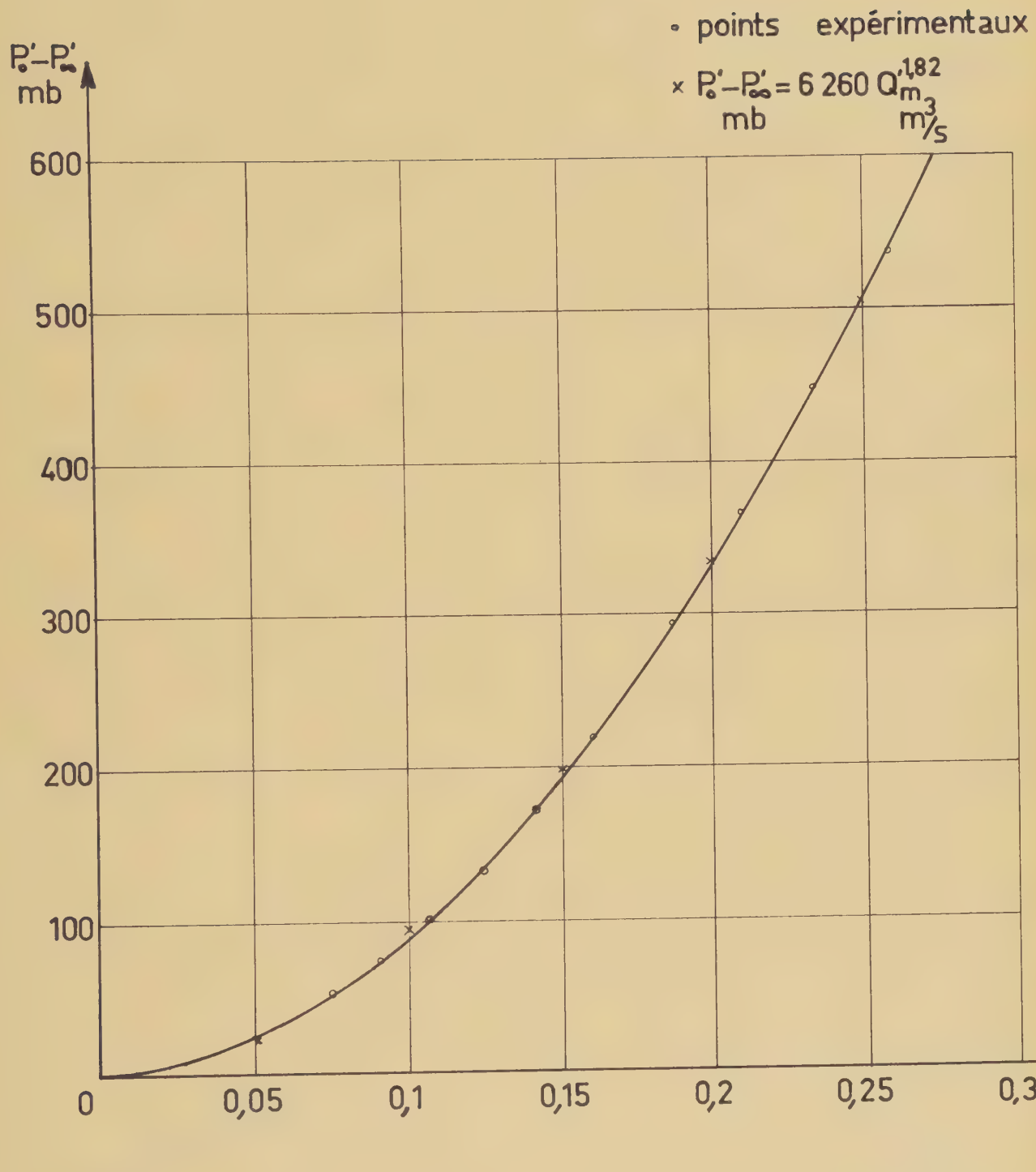
Fig. 16



Caractéristique d'alimentation du modéle

hydraulique de la bascule monostable

Fig.17



Caractéristique d'alimentation

de la bascule monostable air

Fig.18

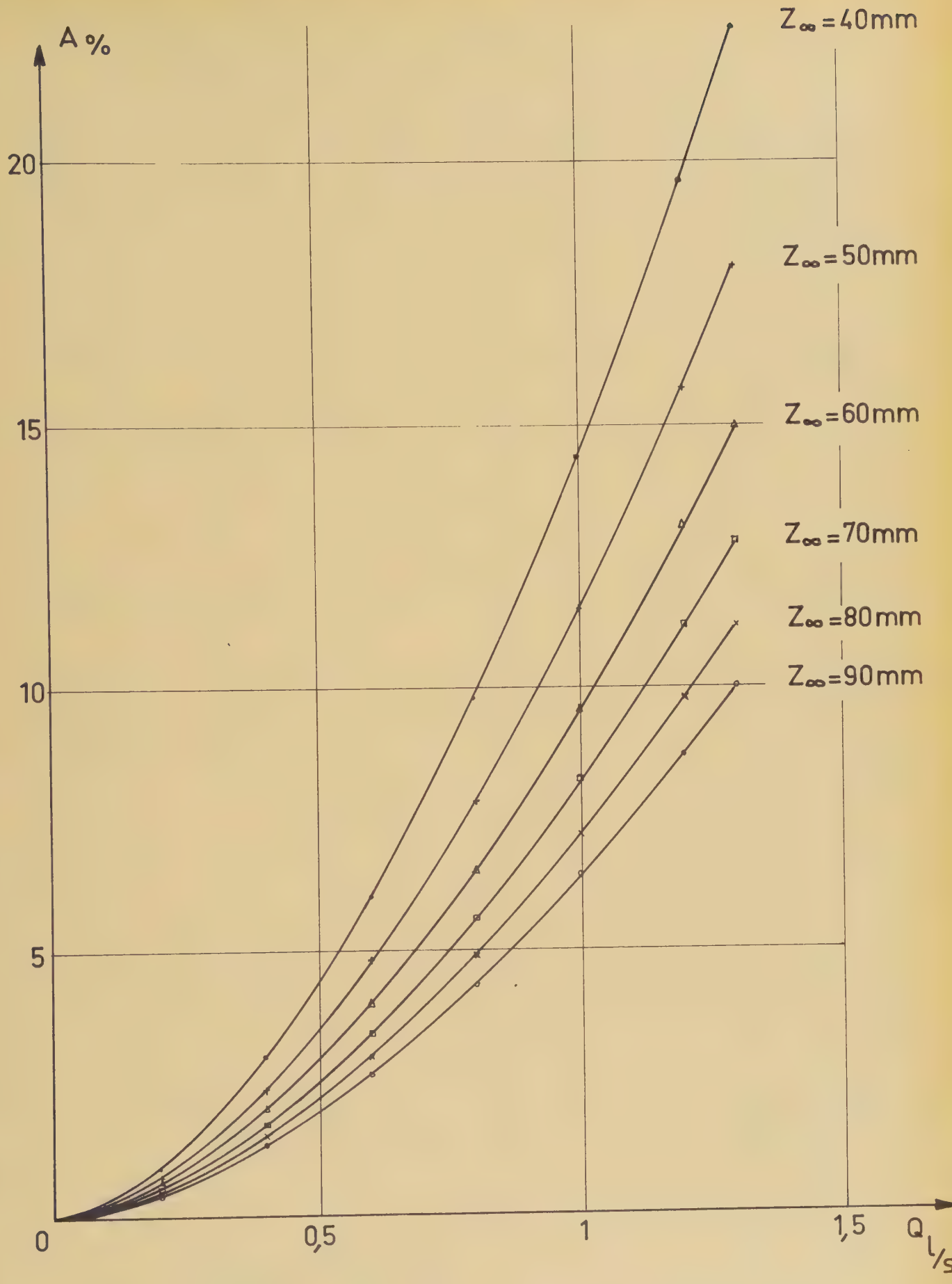
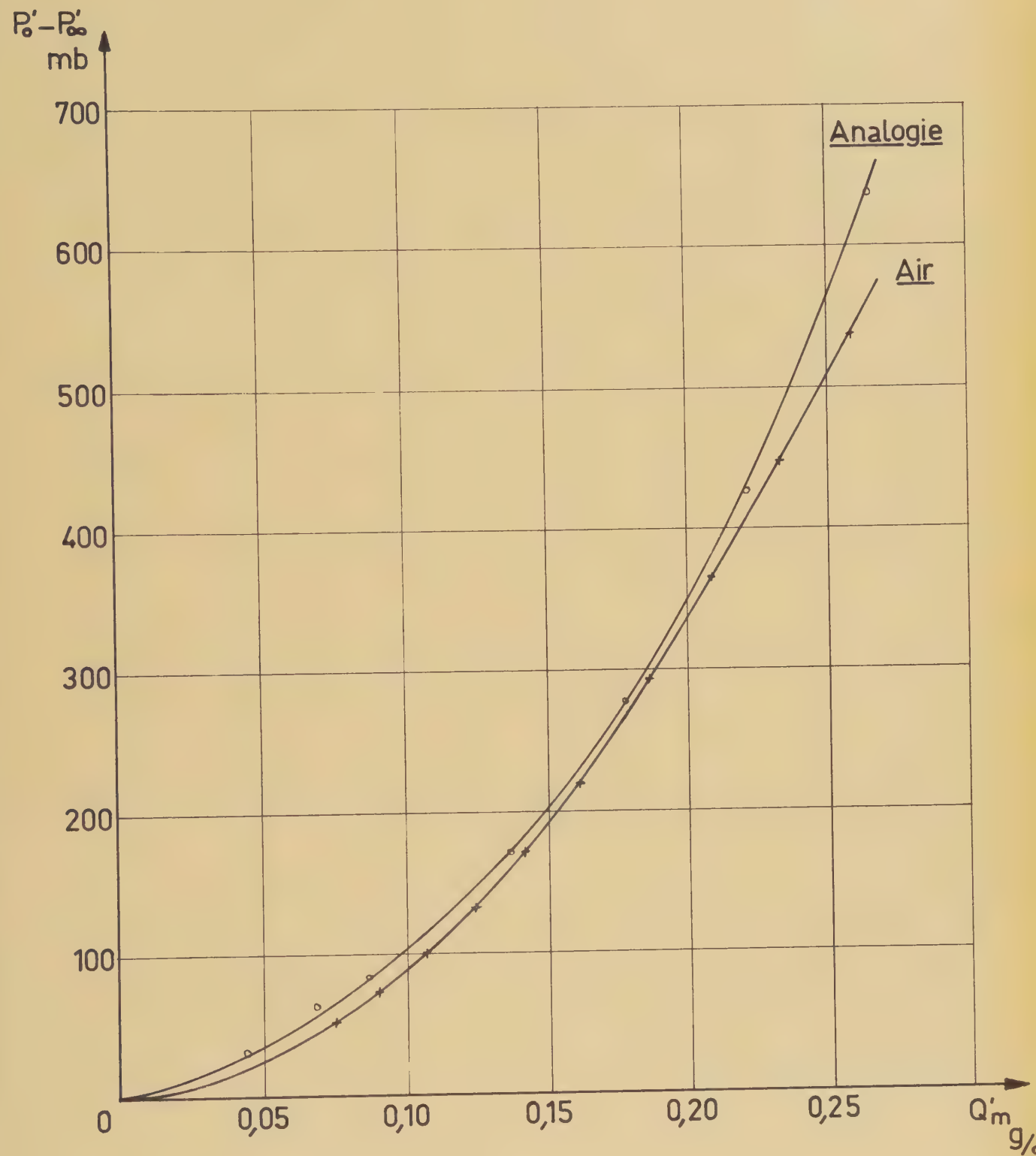


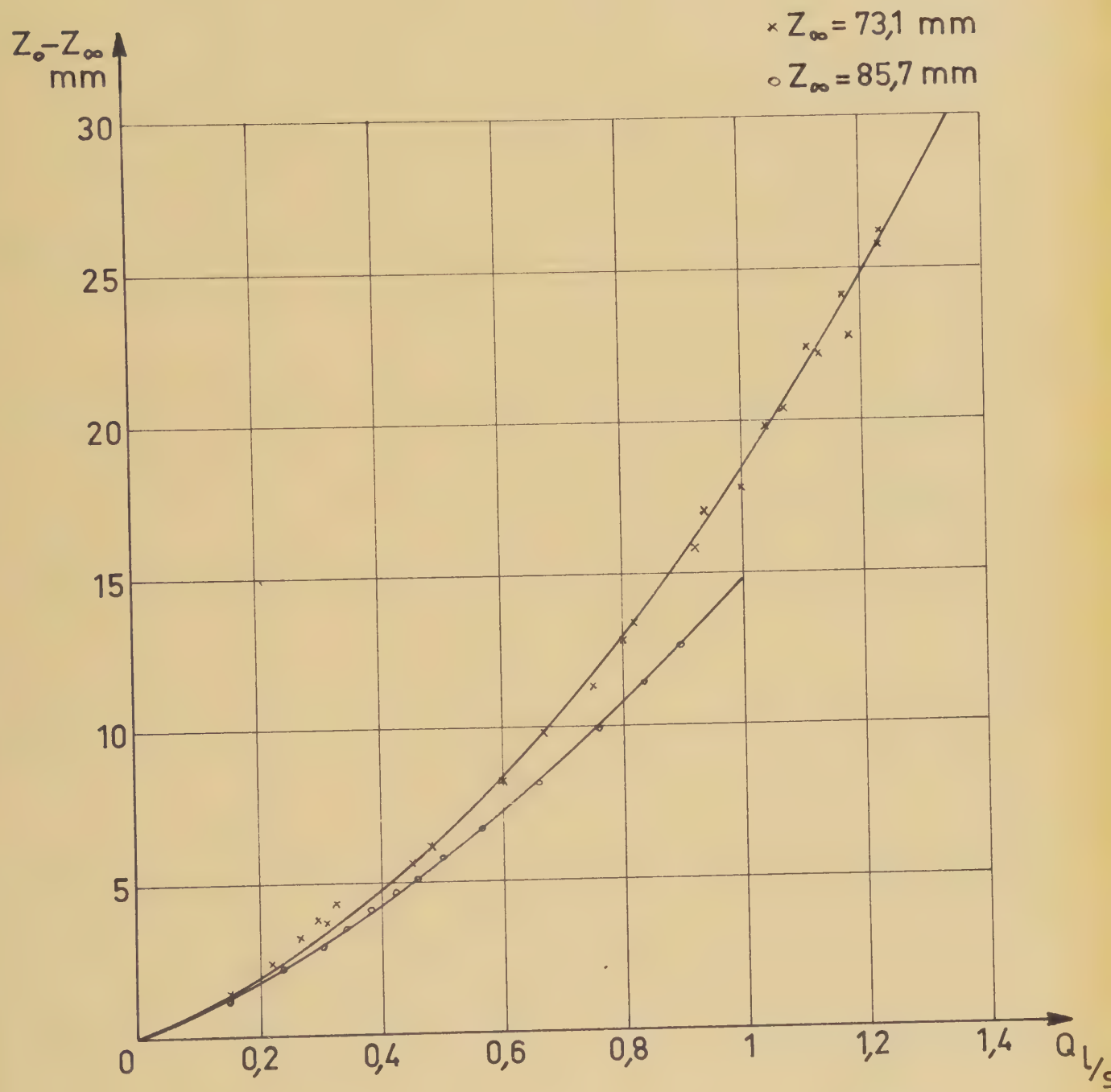
Fig.19



Analogie hydraulique

pour la bascule monostable

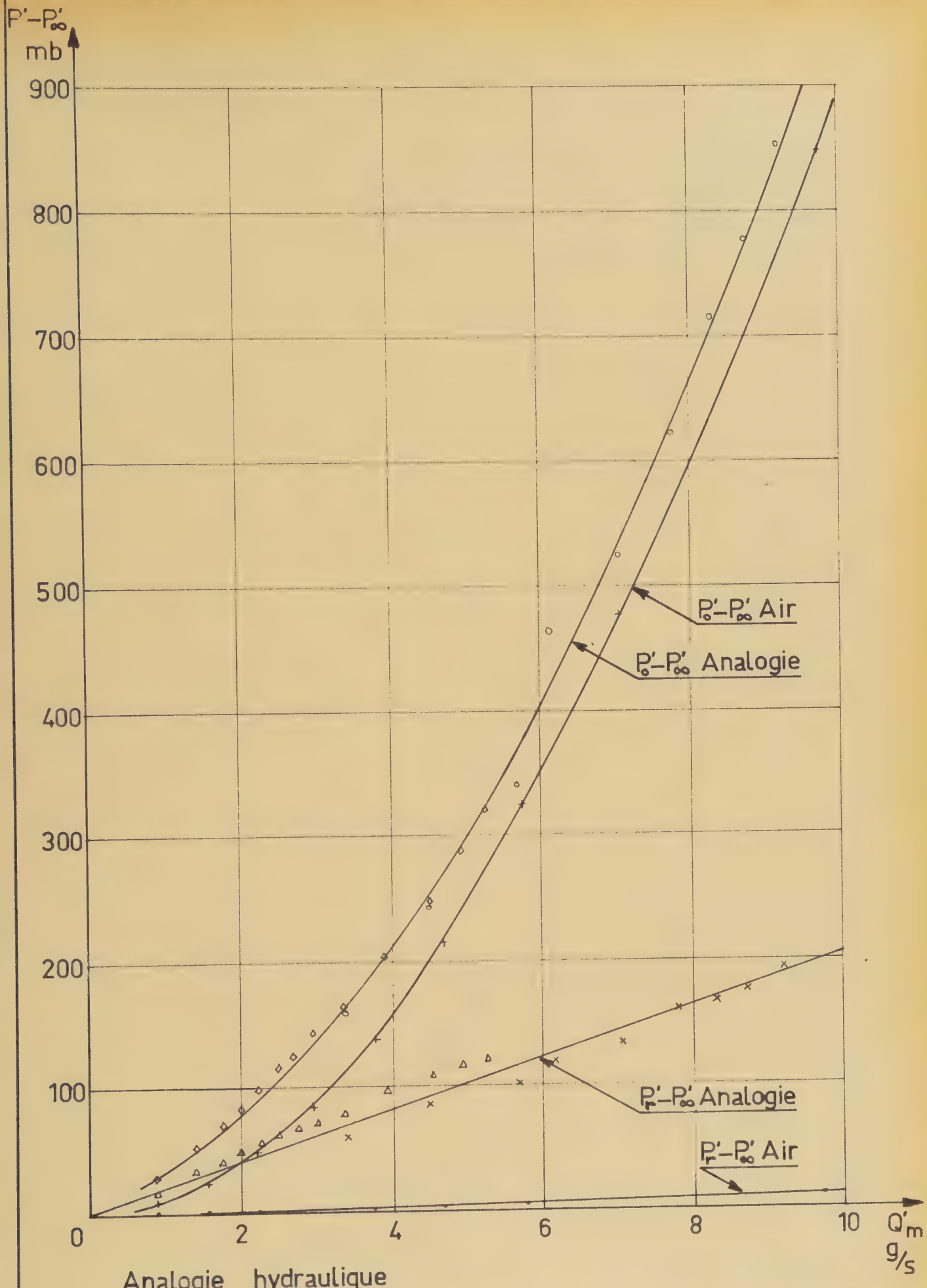
Fig.20



Caractéristique d'alimentation du modéle

hydraulique de la bascule bistable

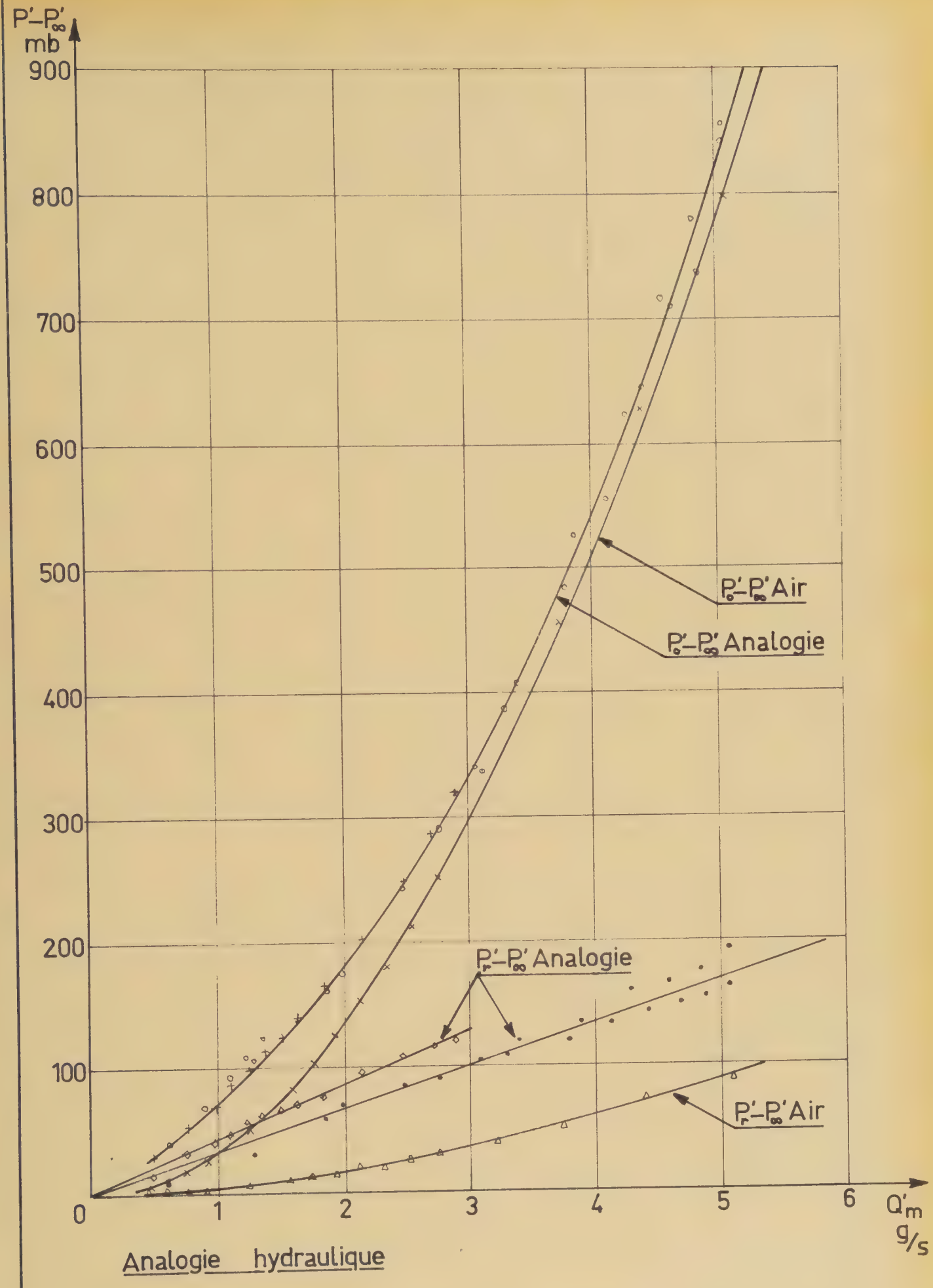
Fig.21



Analogie hydraulique

pour la bascule bistable M I

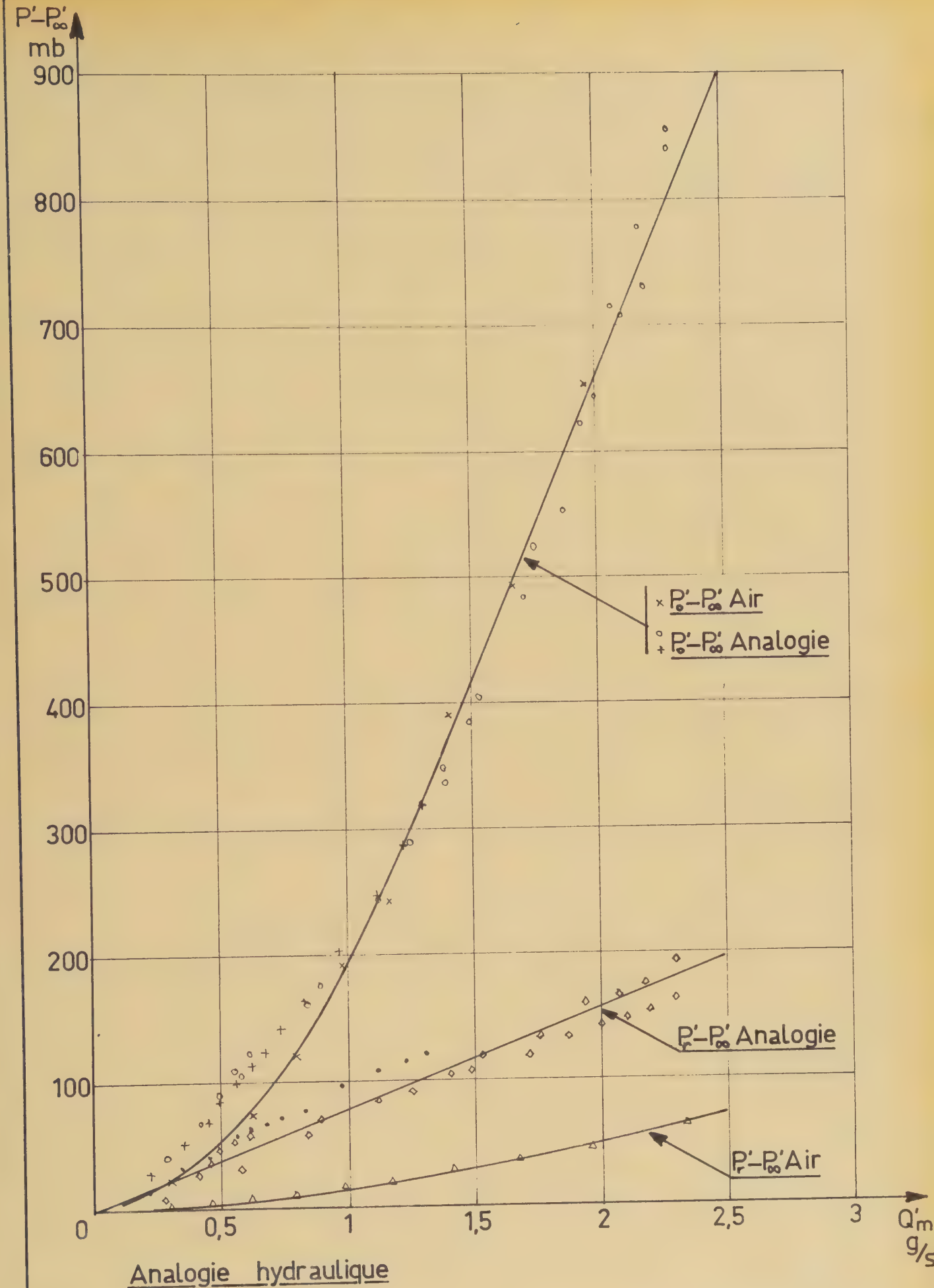
Fig.22



Analogie hydraulique

pour la bascule bistable MIIA

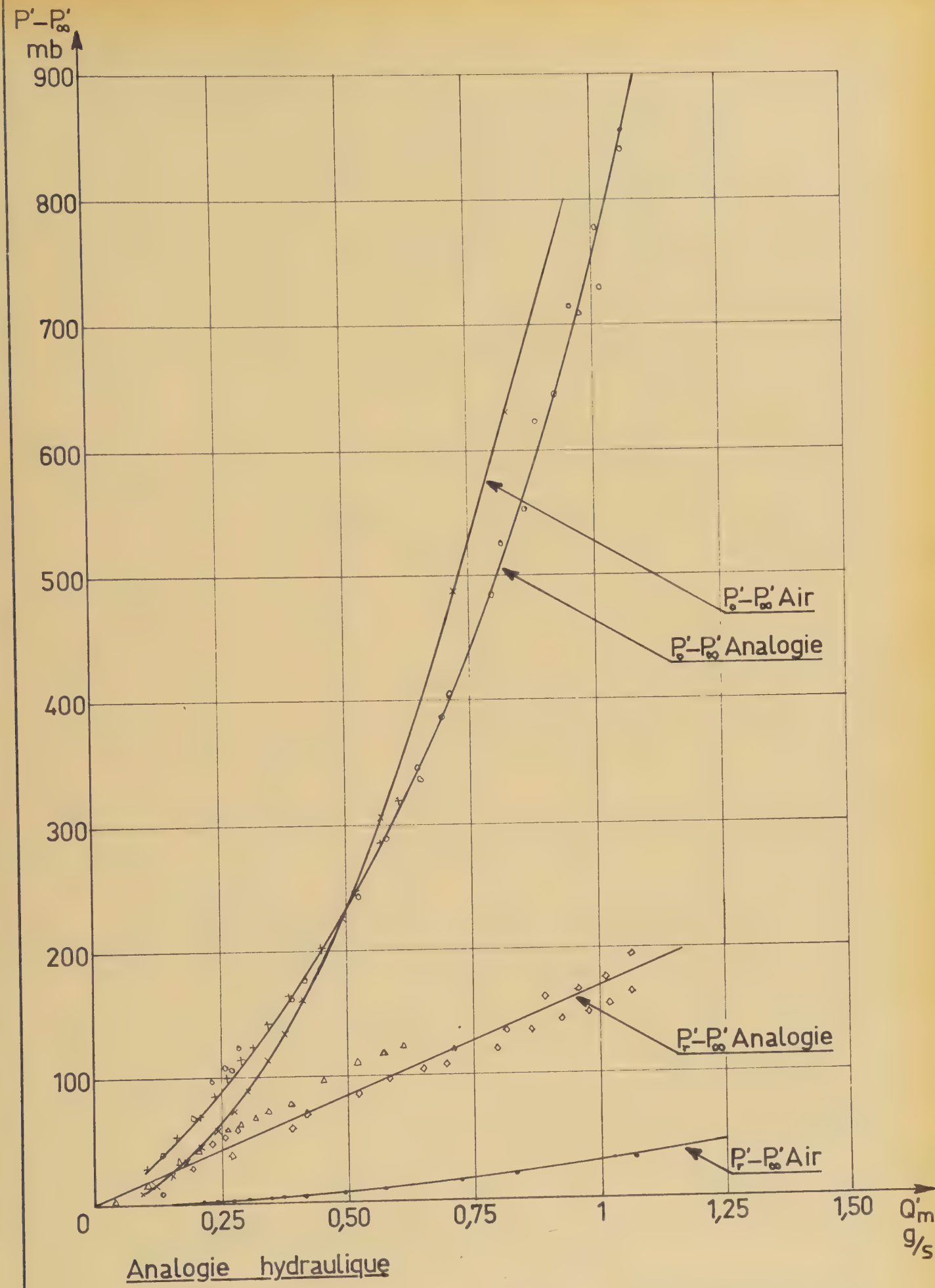
Fig.23



Analogie hydraulique

pour la bascule bistable M III A

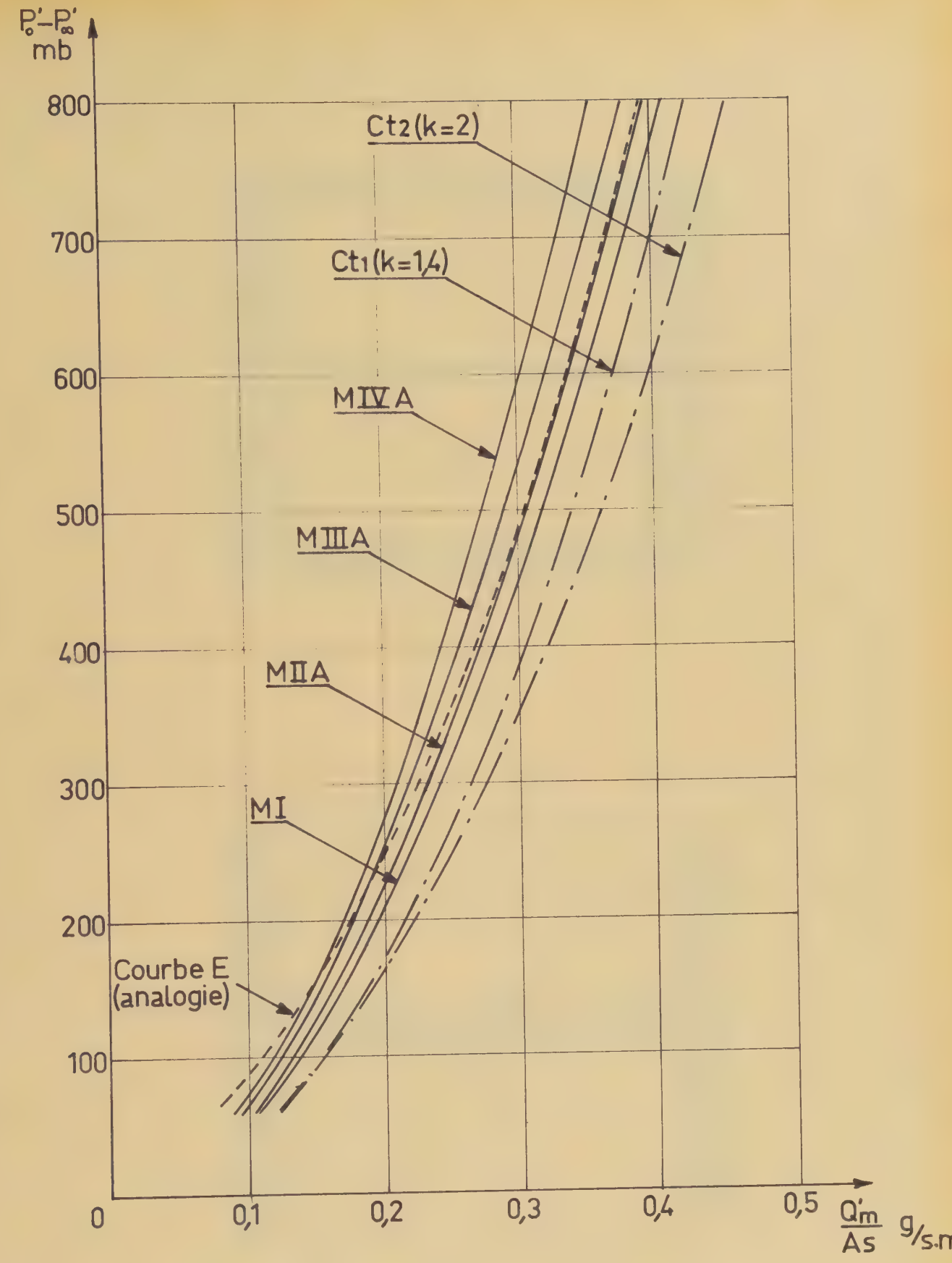
Fig.24



Analogie hydraulique

pour la bascule bistable M IV A

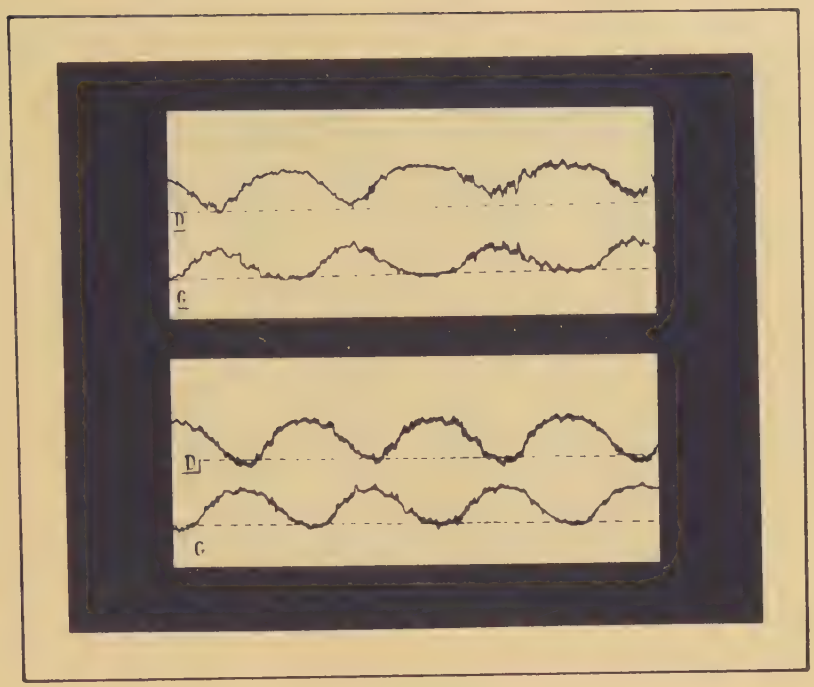
Fig.25



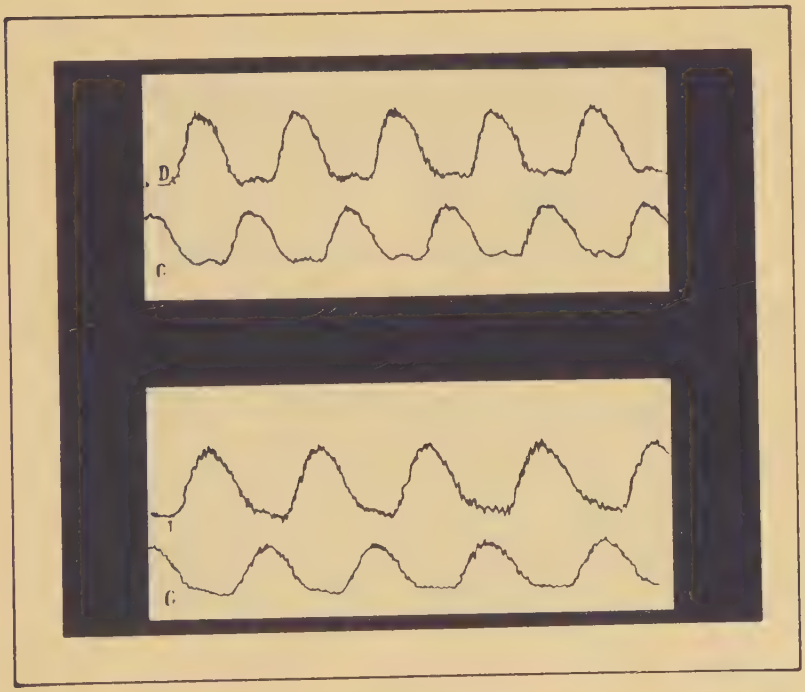
Caractéristiques pression vitesse moyenne

de la buse d'alimentation

Fig.26



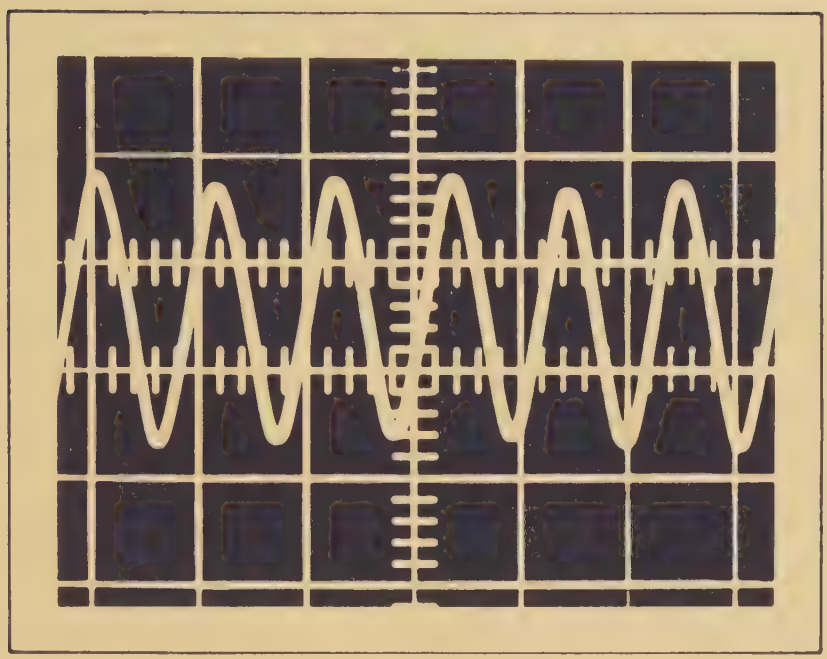
f=0,038 Hz



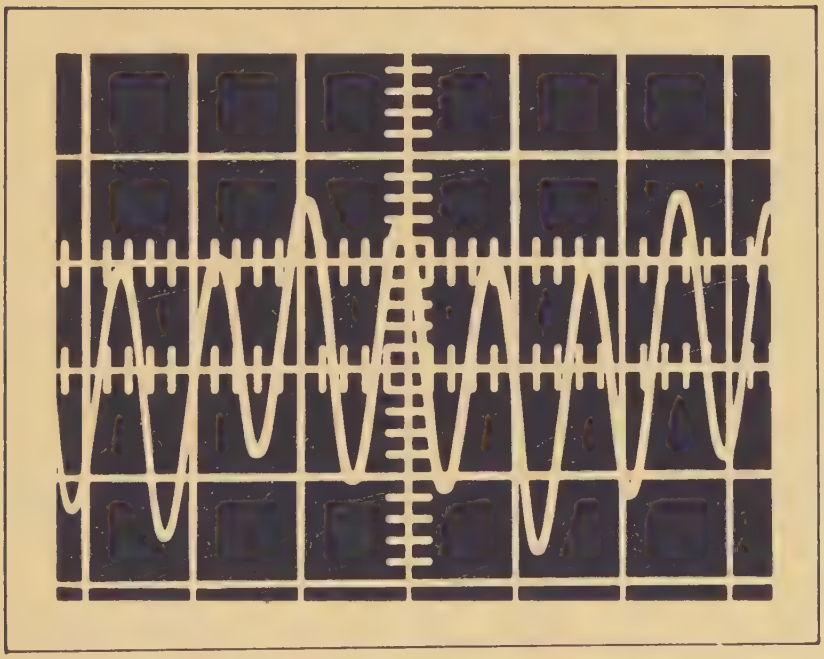
f=0,053 Hz

Oscillations bascule bistable "hydraulique"

Fig.27



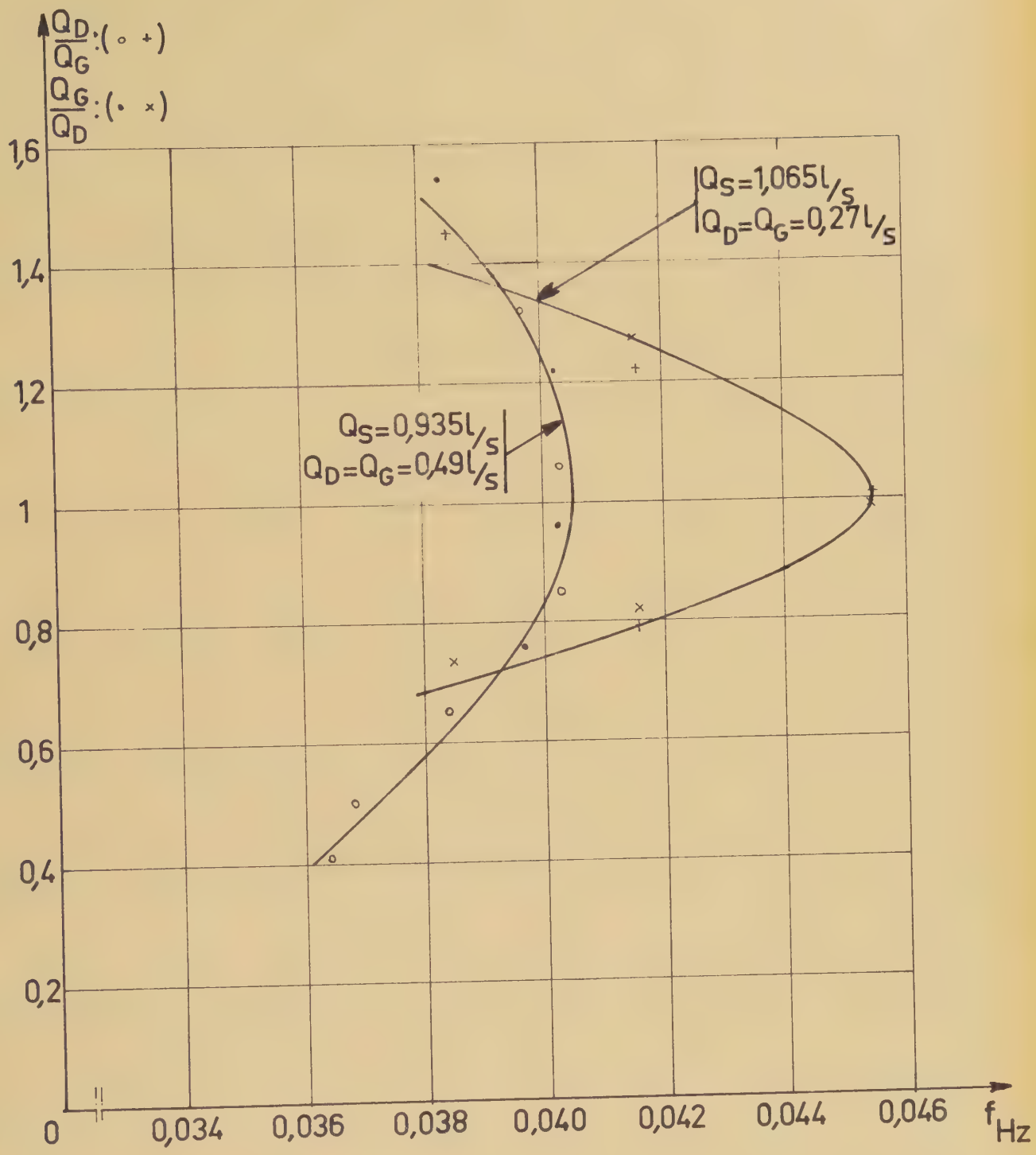
f≈91 Hz



f≈233 Hz

Oscillations bascule bistable "air"

Fig.28



Fréquence d'oscillation en fonction

du rapport des débits de commande

Fig.29

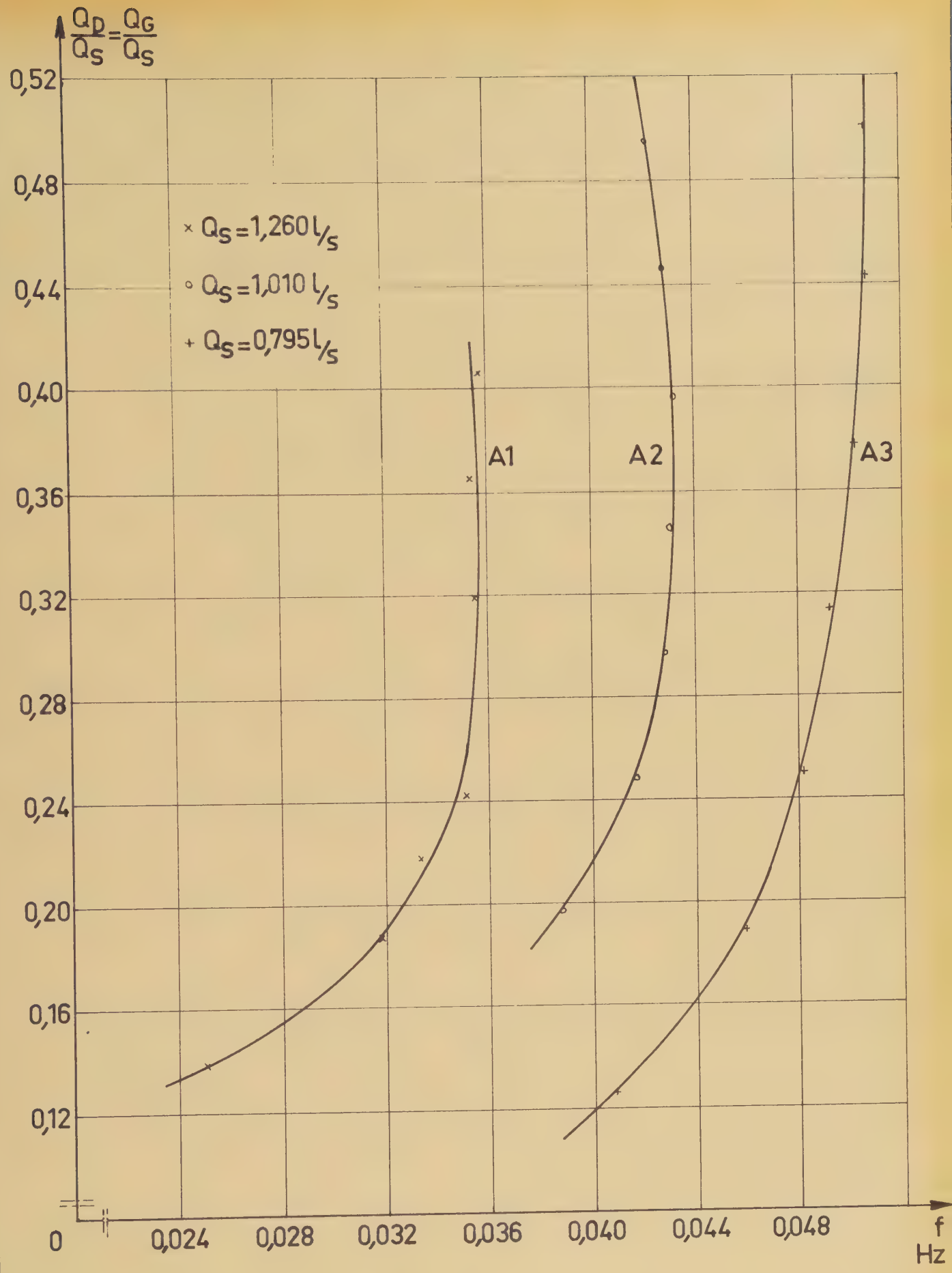

$\frac{Q_D}{Q_S}=\frac{Q_G}{Q_S}$
0,52
0,48
0,44
0,40
0,36
0,32
0,28
0,24
0,20
0,16
0,12
0
× Q_S=1,260 l/s
○ Q_S=1,010 l/s
+ Q_S=0,795 l/s
A1
A2
A3
0,024
0,028
0,032
0,036
0,040
0,044
0,048
f
Hz

Fig.30

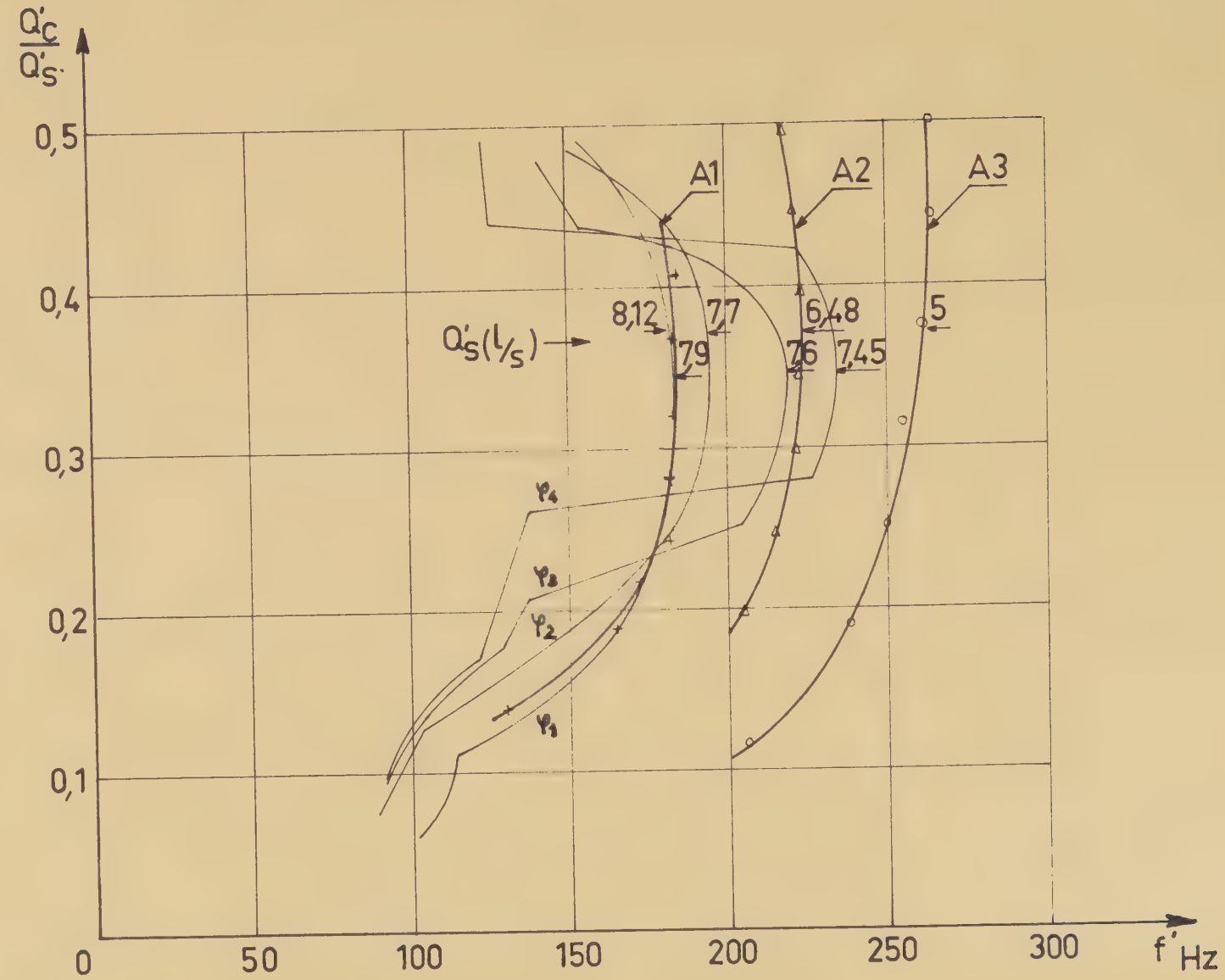

Q'c/Q's
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
50
100
150
200
250
300
f' Hz
A1
A2
A3
Q's(l/s) →
8,12
7,7
6,48
5
7,9
7,6
7,45
φ4
φ3
φ2
φ1

Fig.31

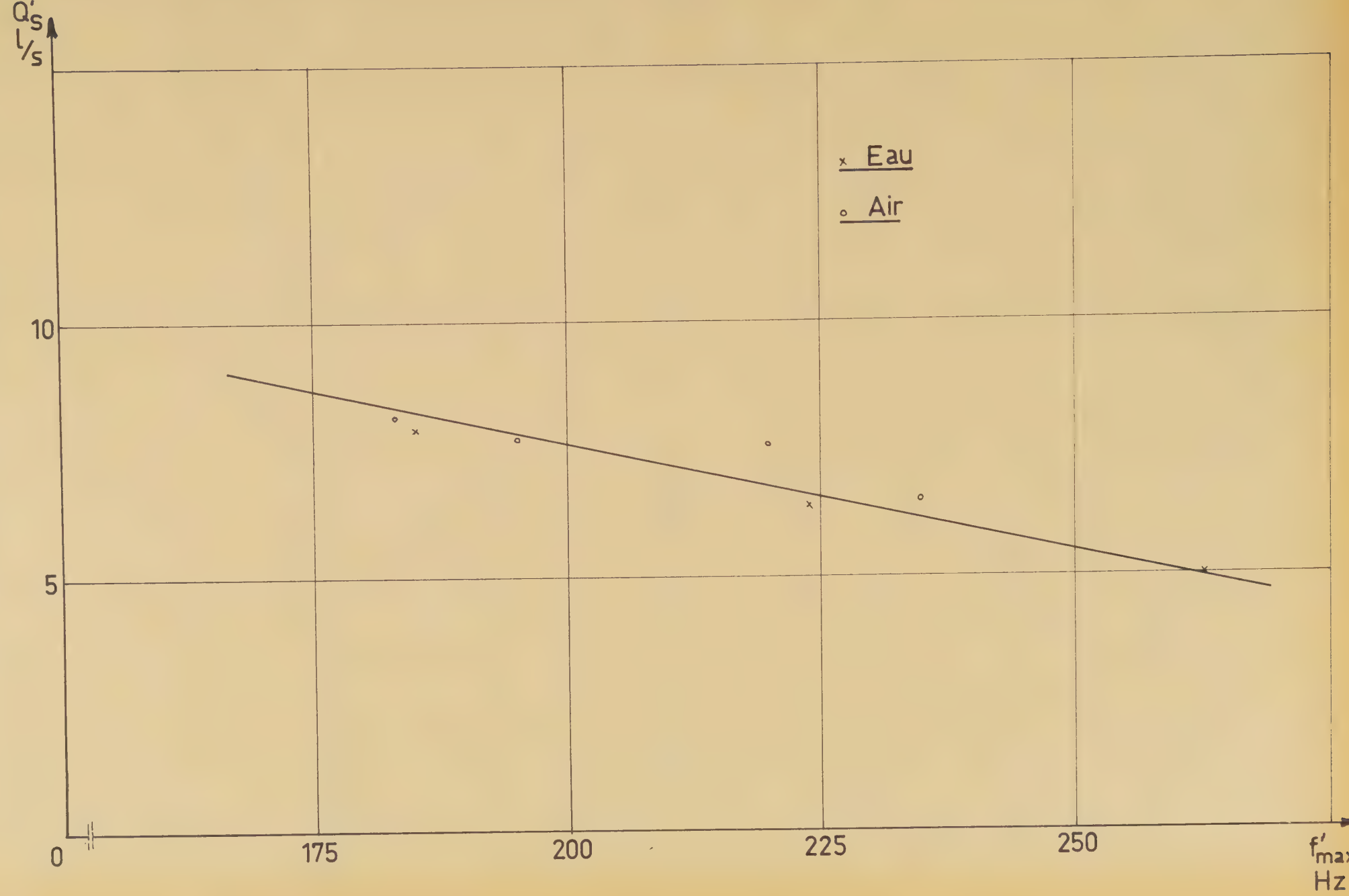
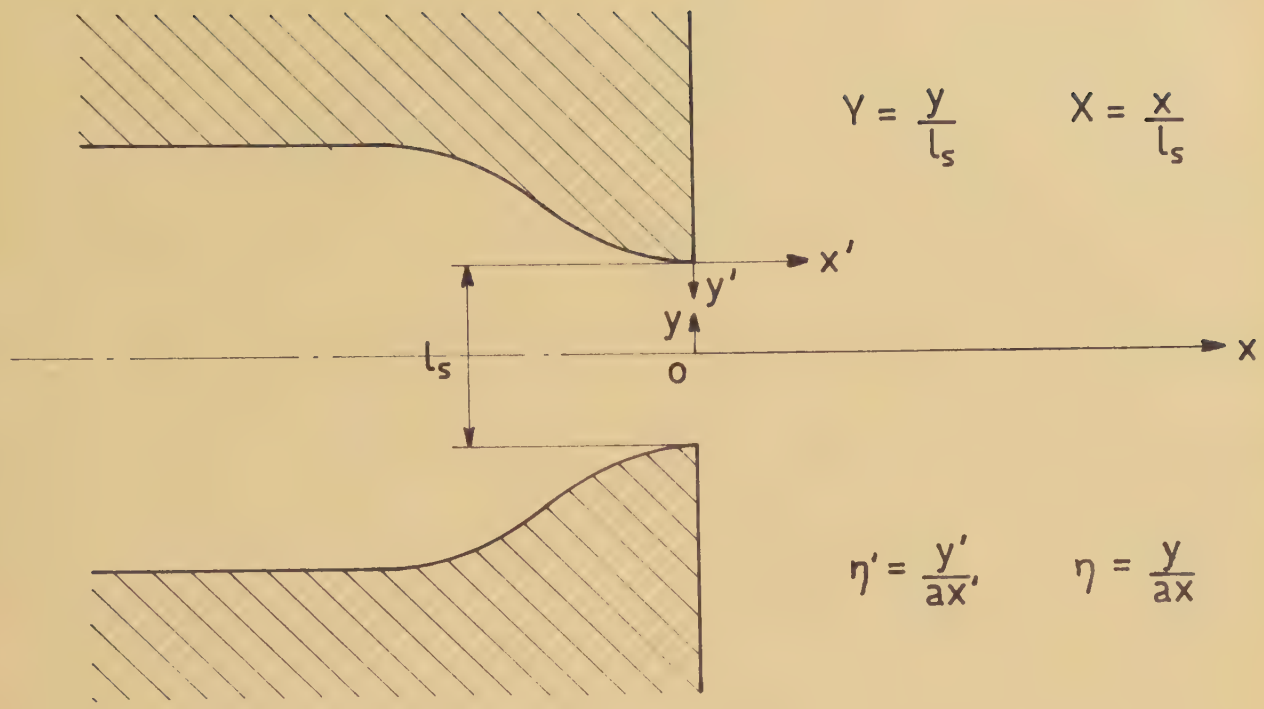
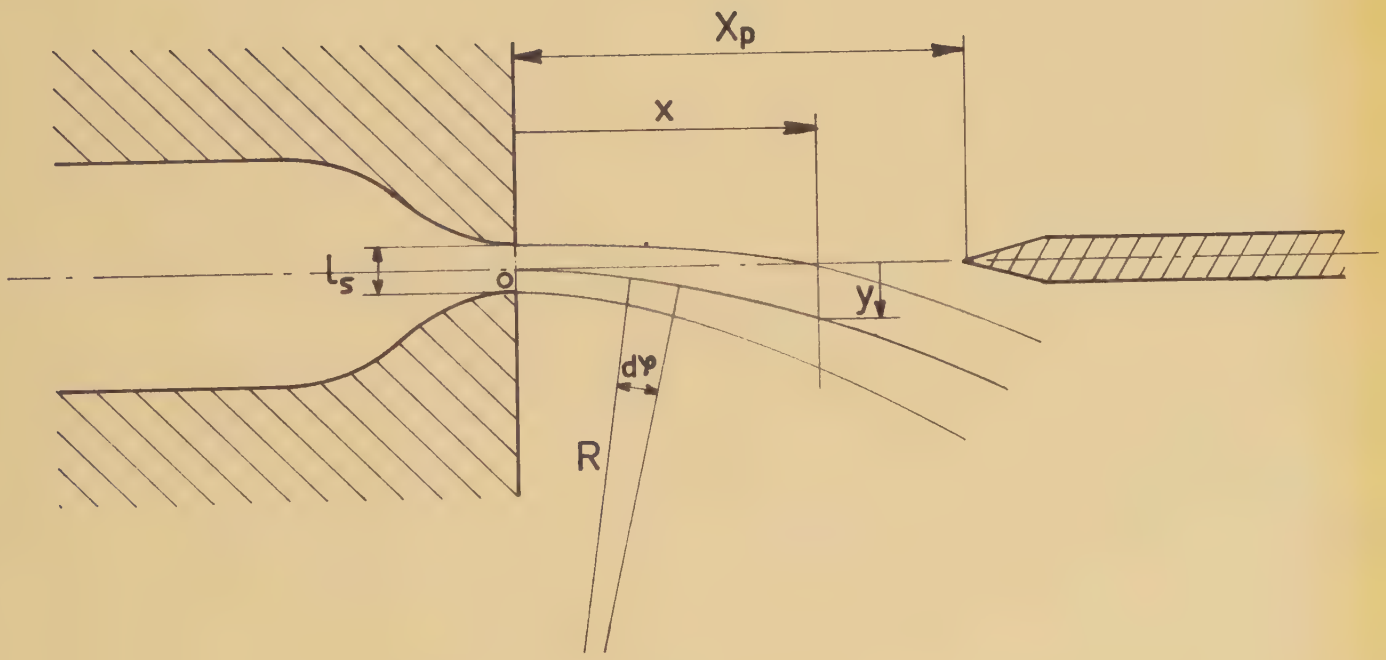


Fig.32



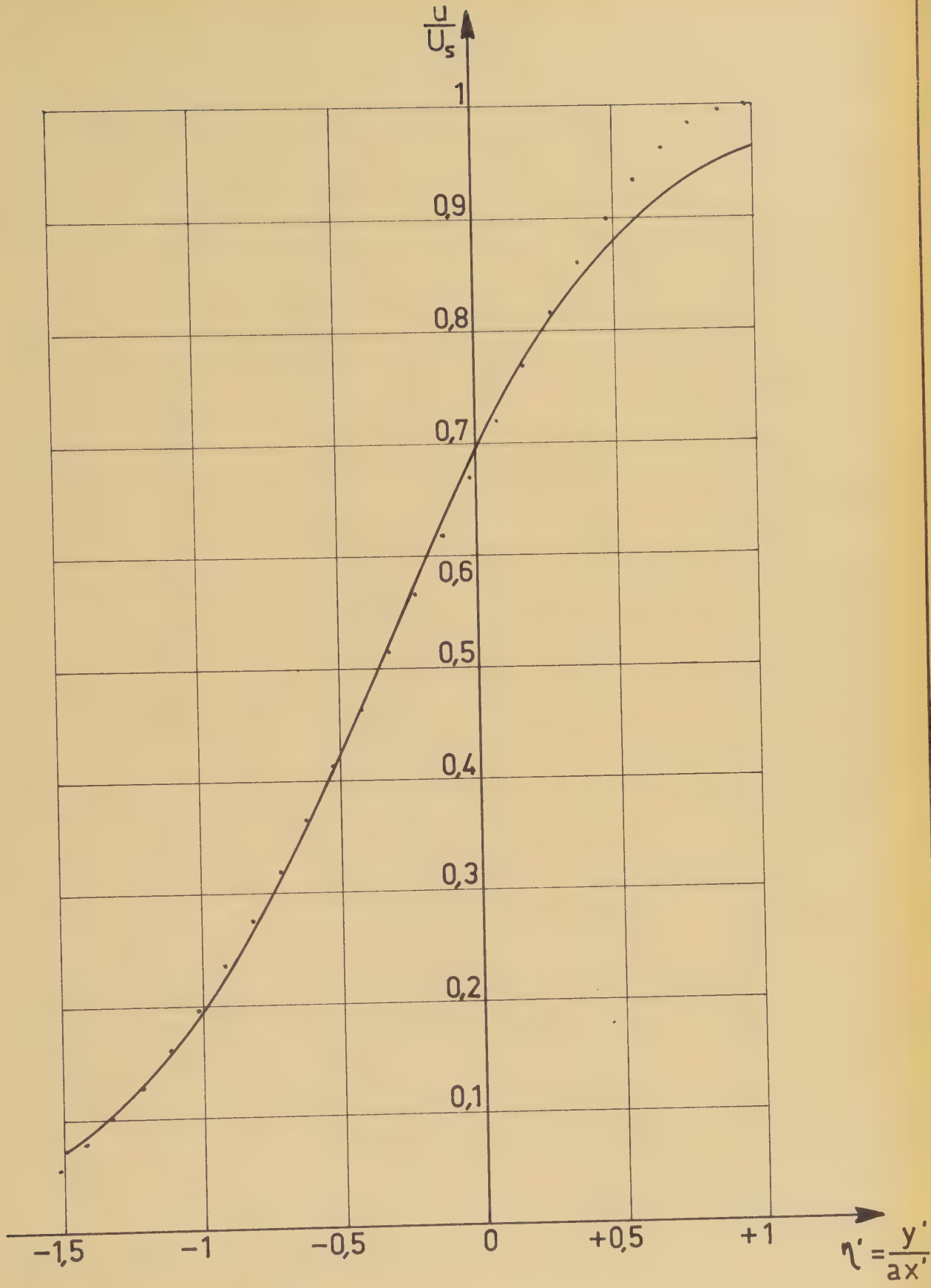
Notations (étude de la région initiale du jet)

Fig.33



Notations (dynamique du jet)

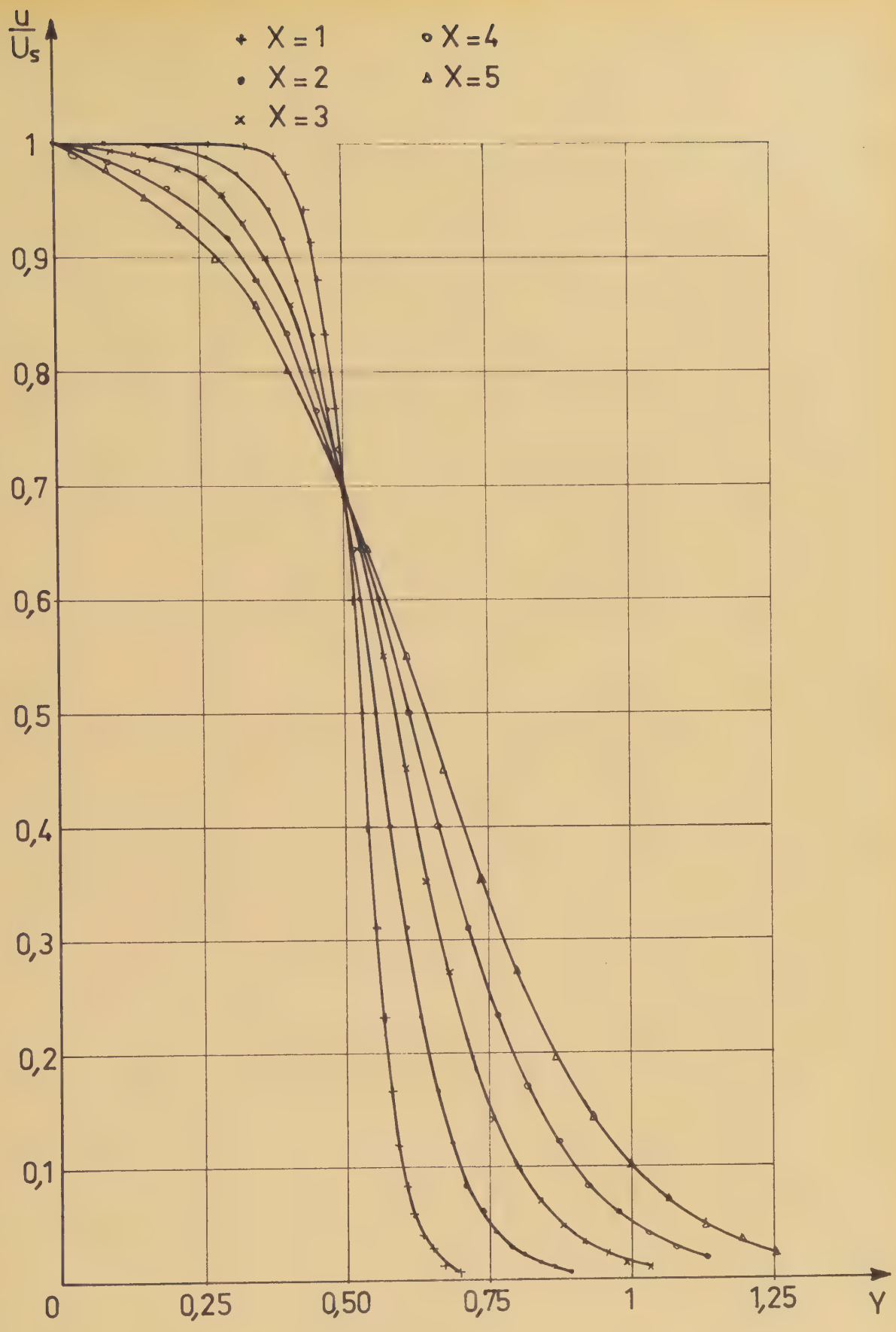
Fig.34



• réf 6 (IIe partie)

—— solution approchée (rel.49)

Fig.35



Profils des vitesses théorique (rel 49)

Fig.36

Epaisseur de quantité de mouvement (jet théorique)

Fig.37

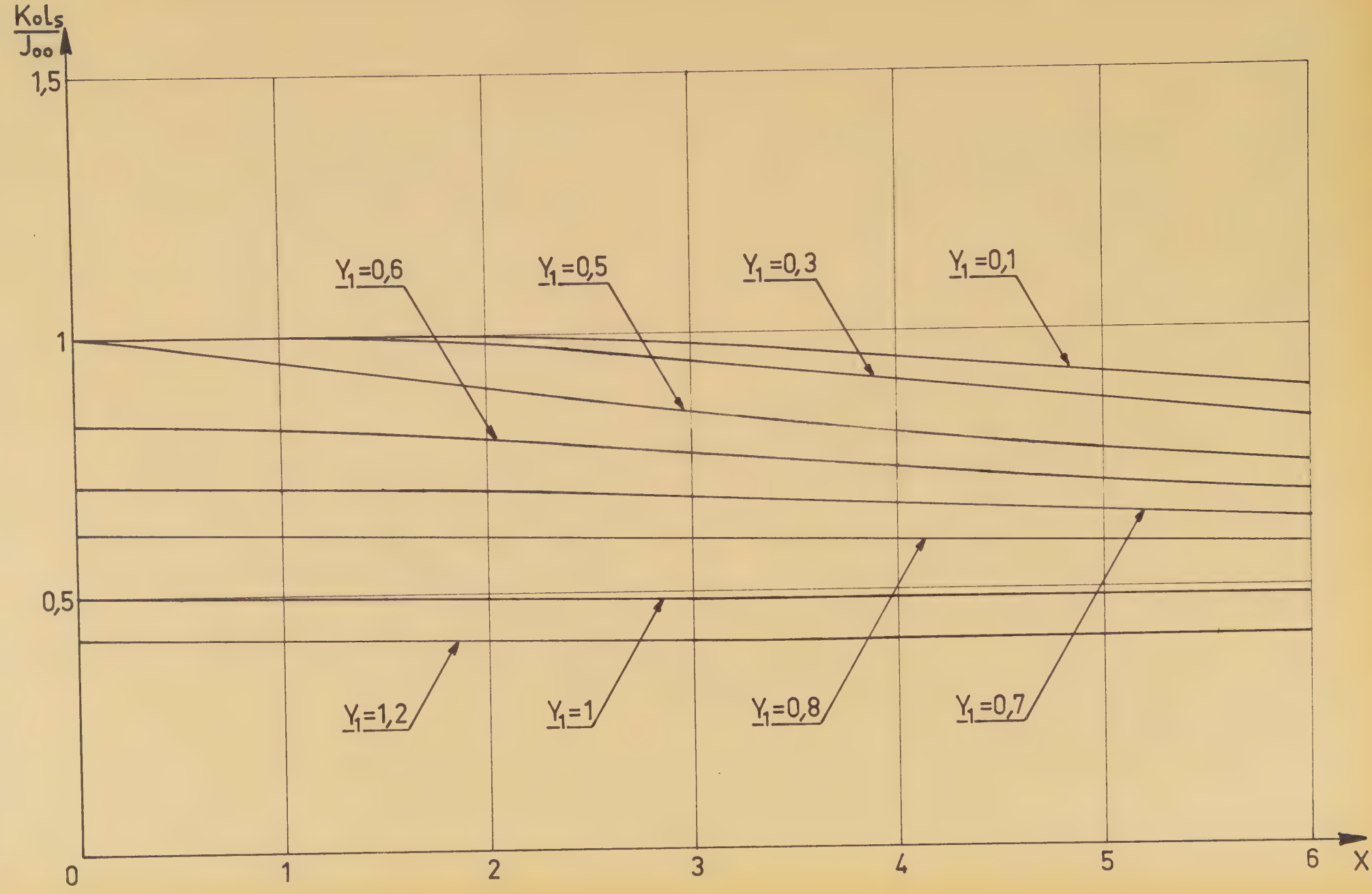

Kols/Joo
1,5
1
0,5
0
1
2
3
4
5
6
X
Y1=0,6
Y1=0,5
Y1=0,3
Y1=0,1
Y1=1,2
Y1=1
Y1=0,8
Y1=0,7

Fig. 38

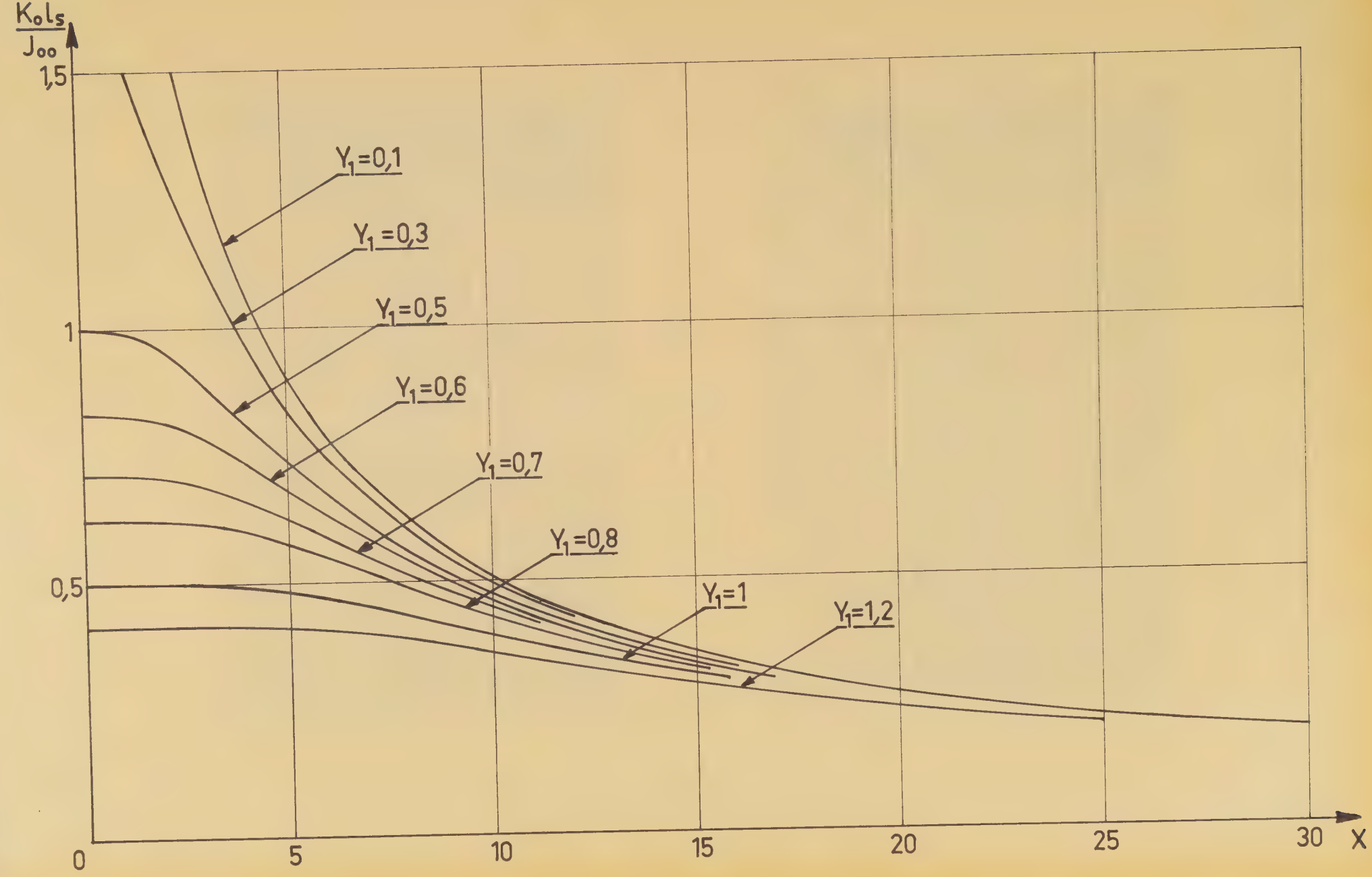

K₀l_s / J₀₀
1,5
1
0,5
0
5
10
15
20
25
30
X
Y₁=0,1
Y₁=0,3
Y₁=0,5
Y₁=0,6
Y₁=0,7
Y₁=0,8
Y₁=1
Y₁=1,2

Fig.39

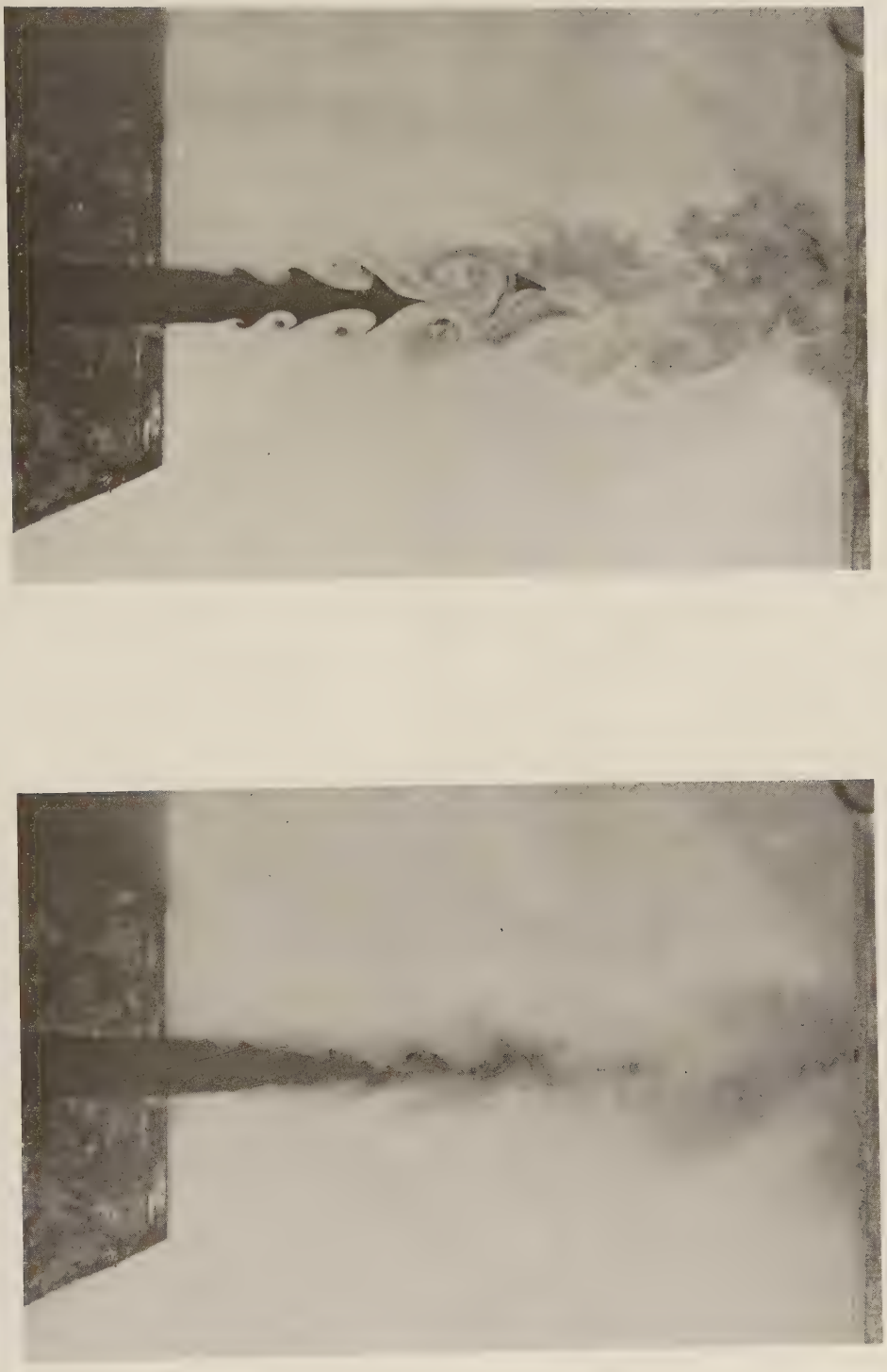


Fig. 40

Fig. 41

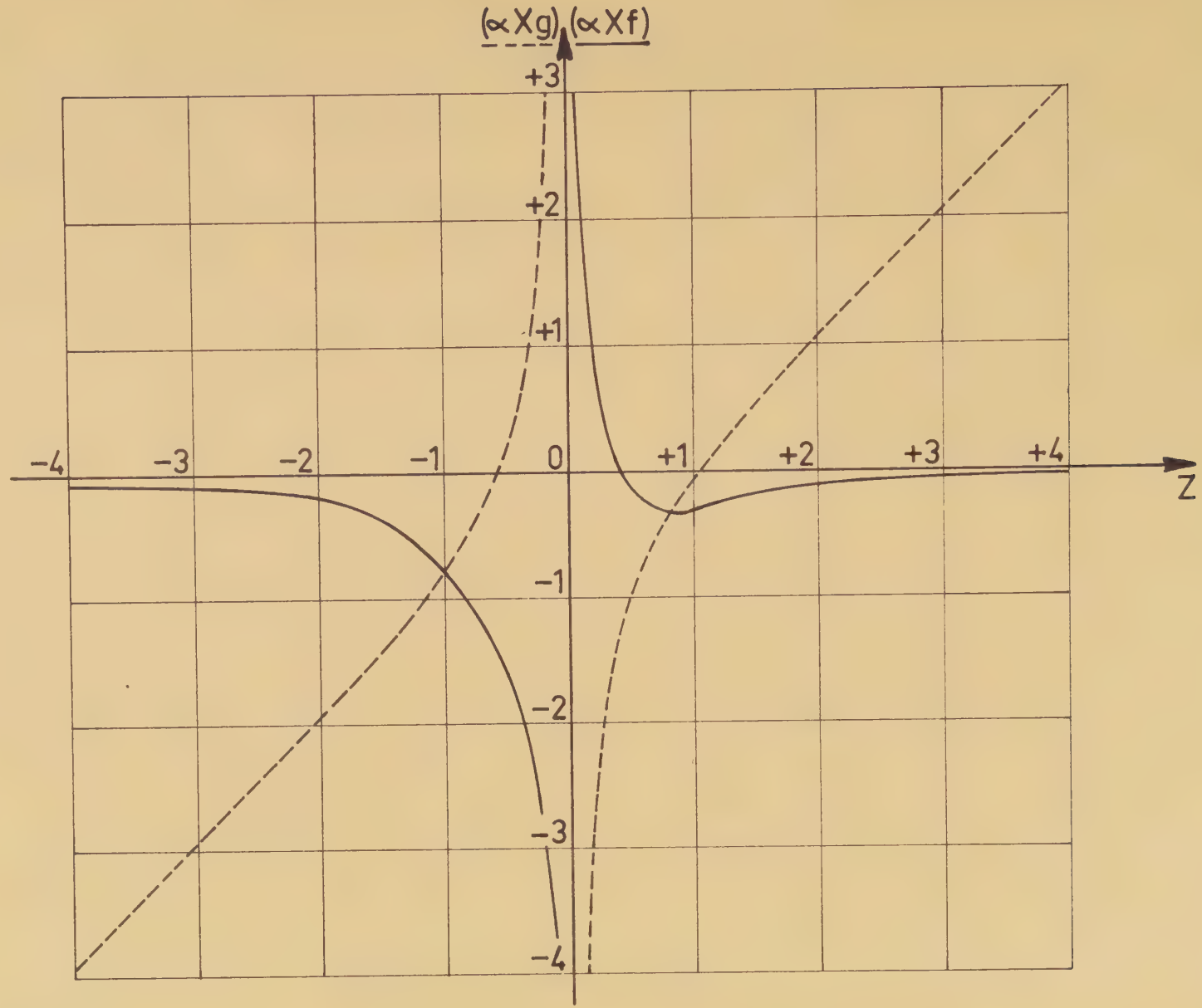


Fig.42

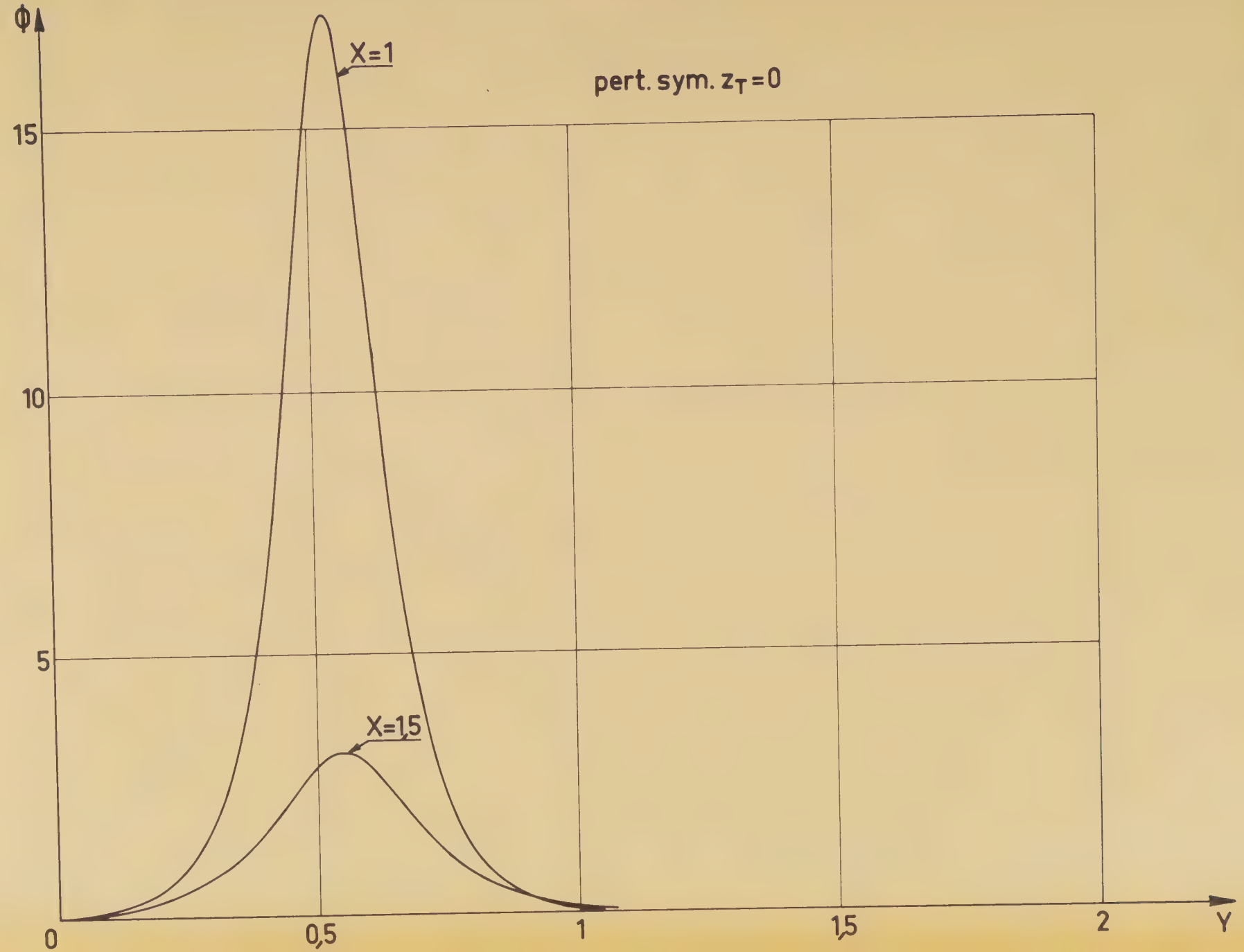


Fig.43

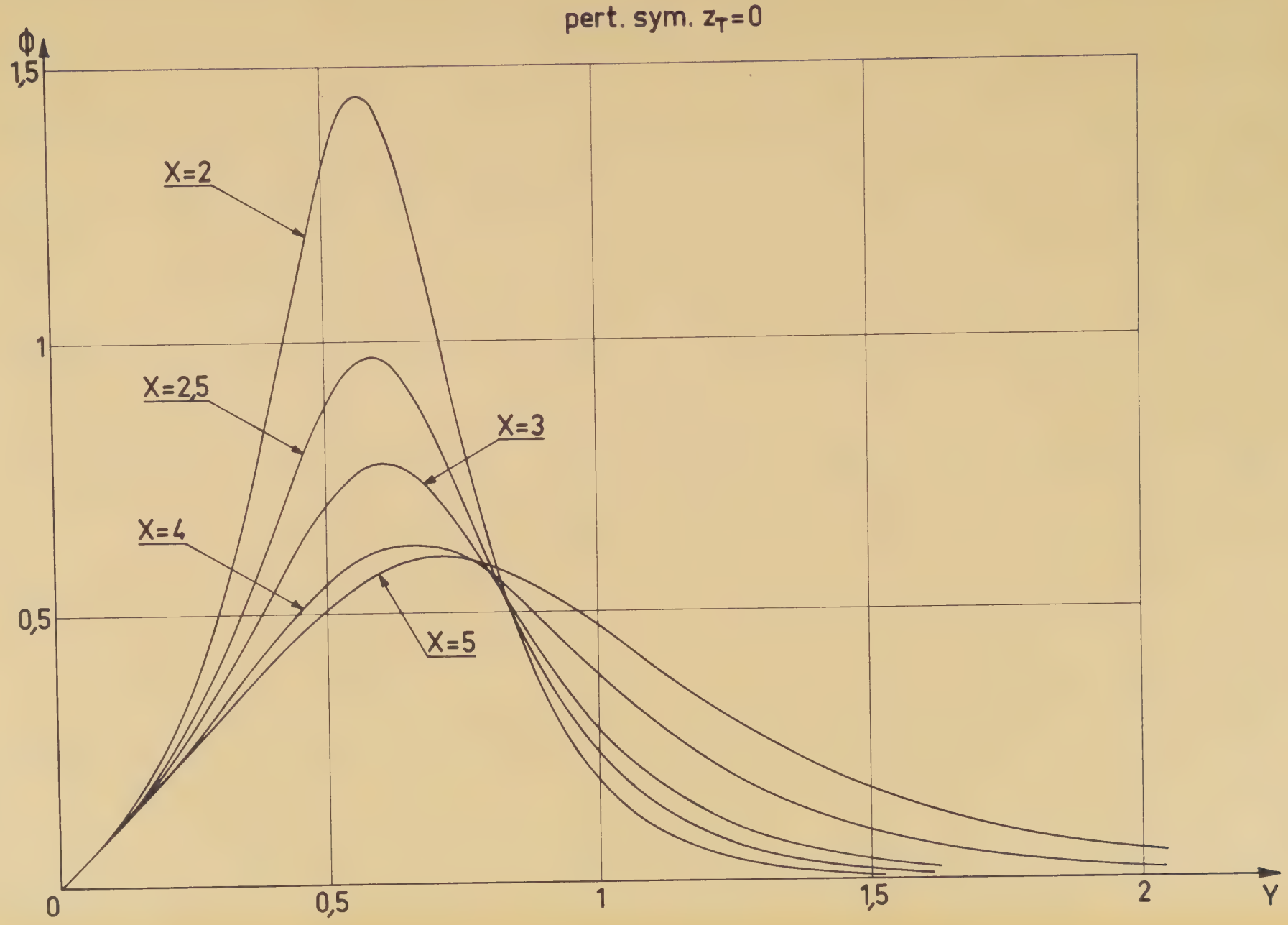


Fig.44

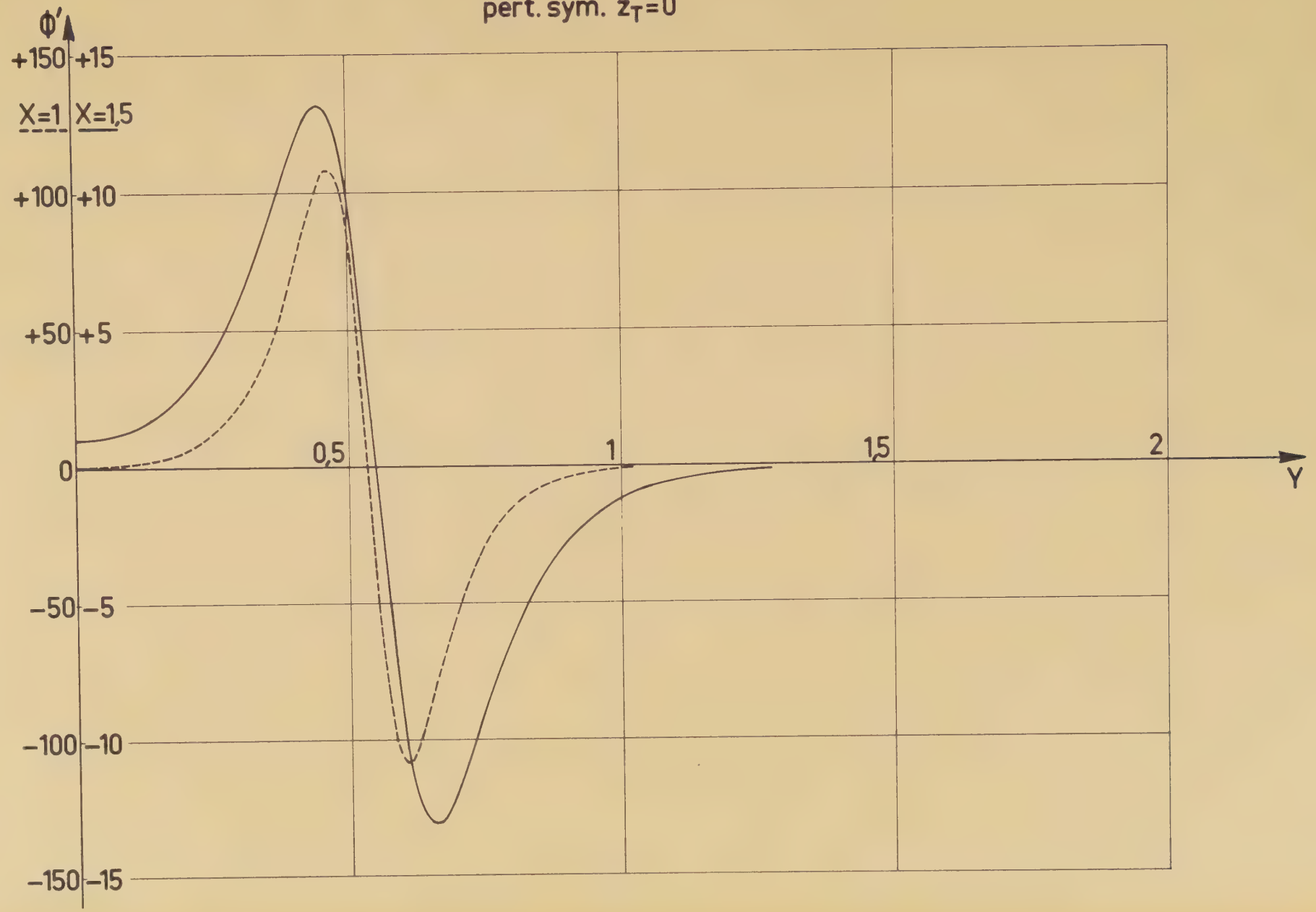

pert. sym. $z_T=0$
Φ'
+150
+15
X=1
X=1,5
+100
+10
+50
+5
0
0,5
1
1,5
2
Y
−50
−5
−100
−10
−150
−15

Fig.45

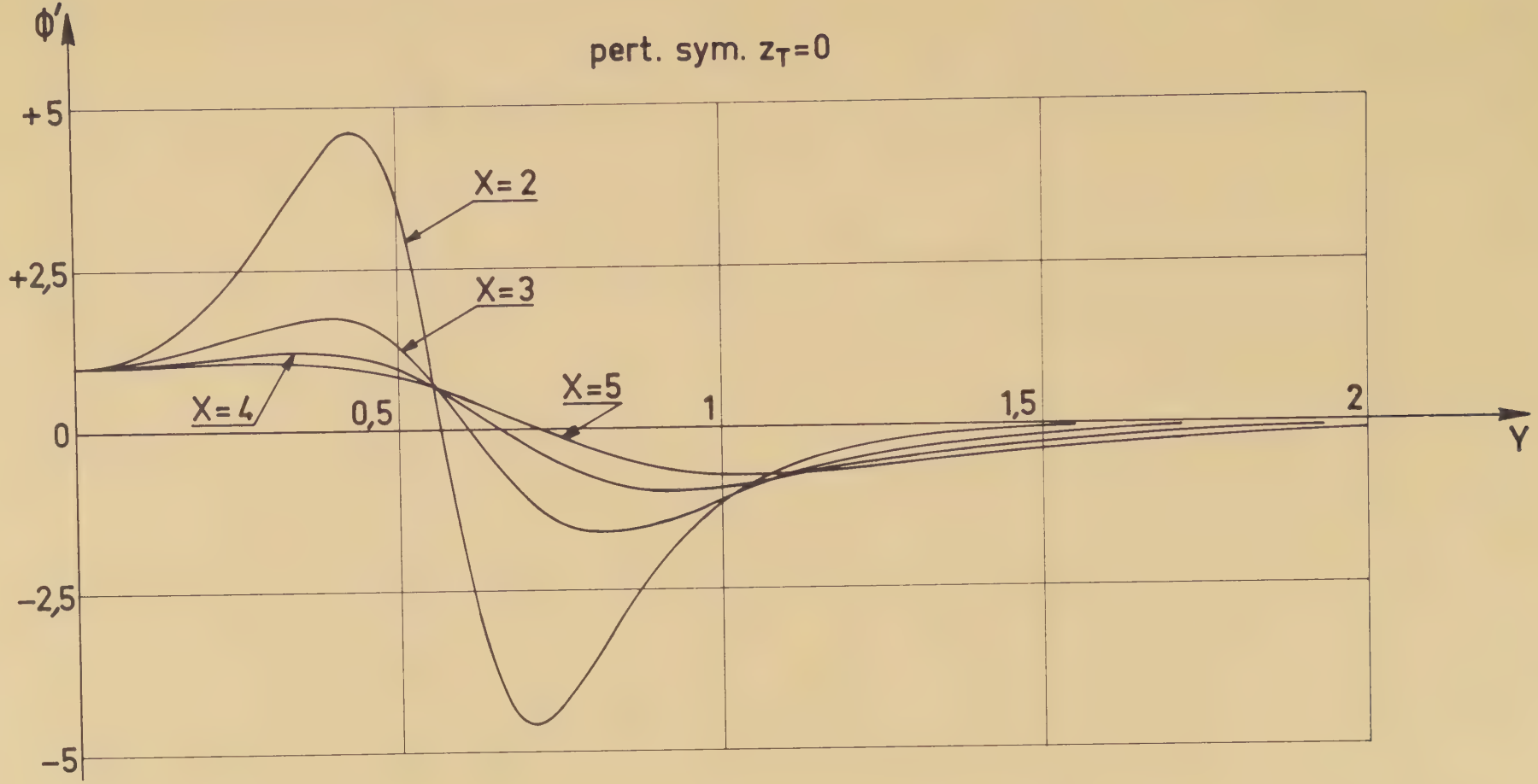


Fig.46

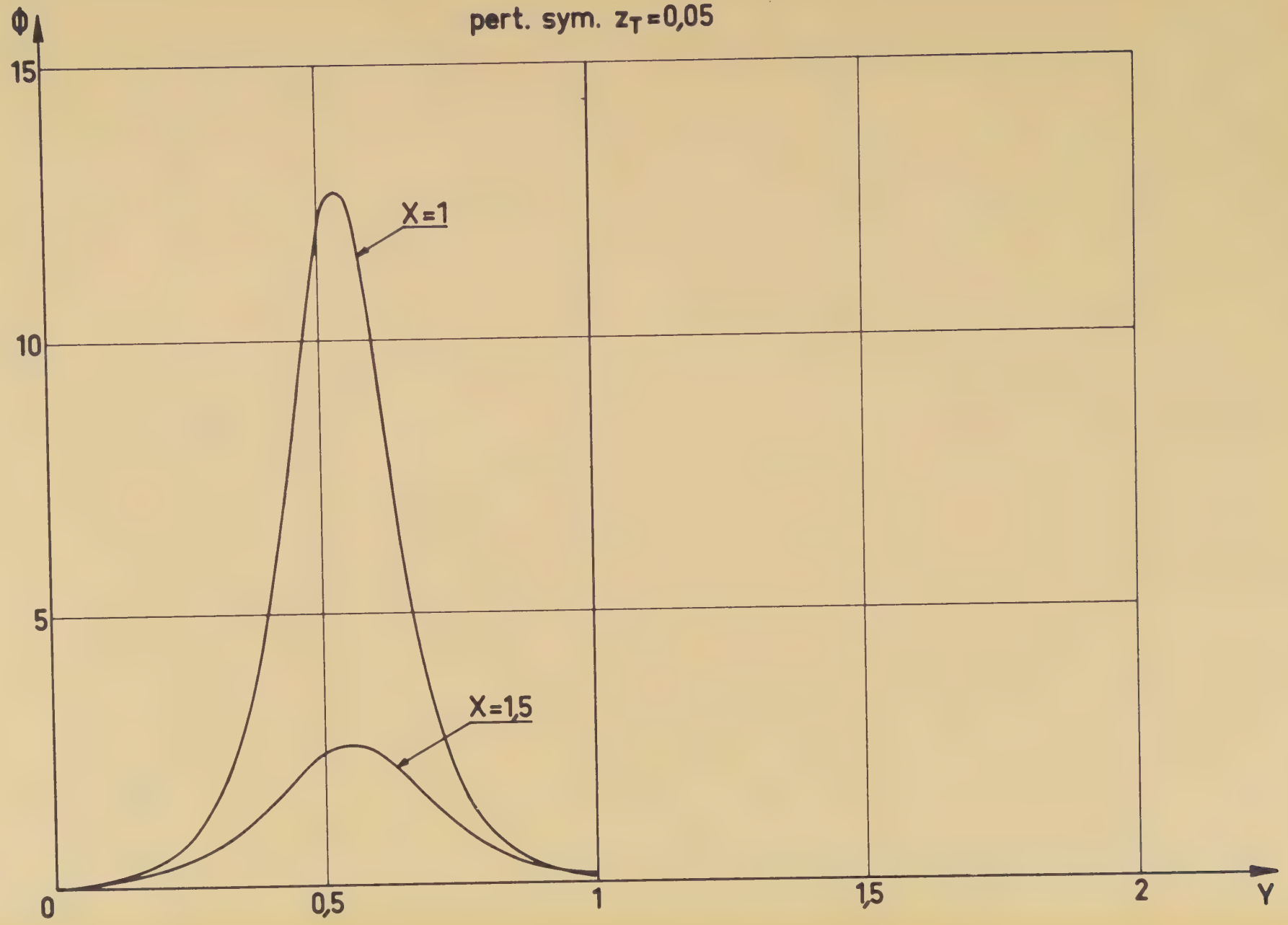


Fig.47

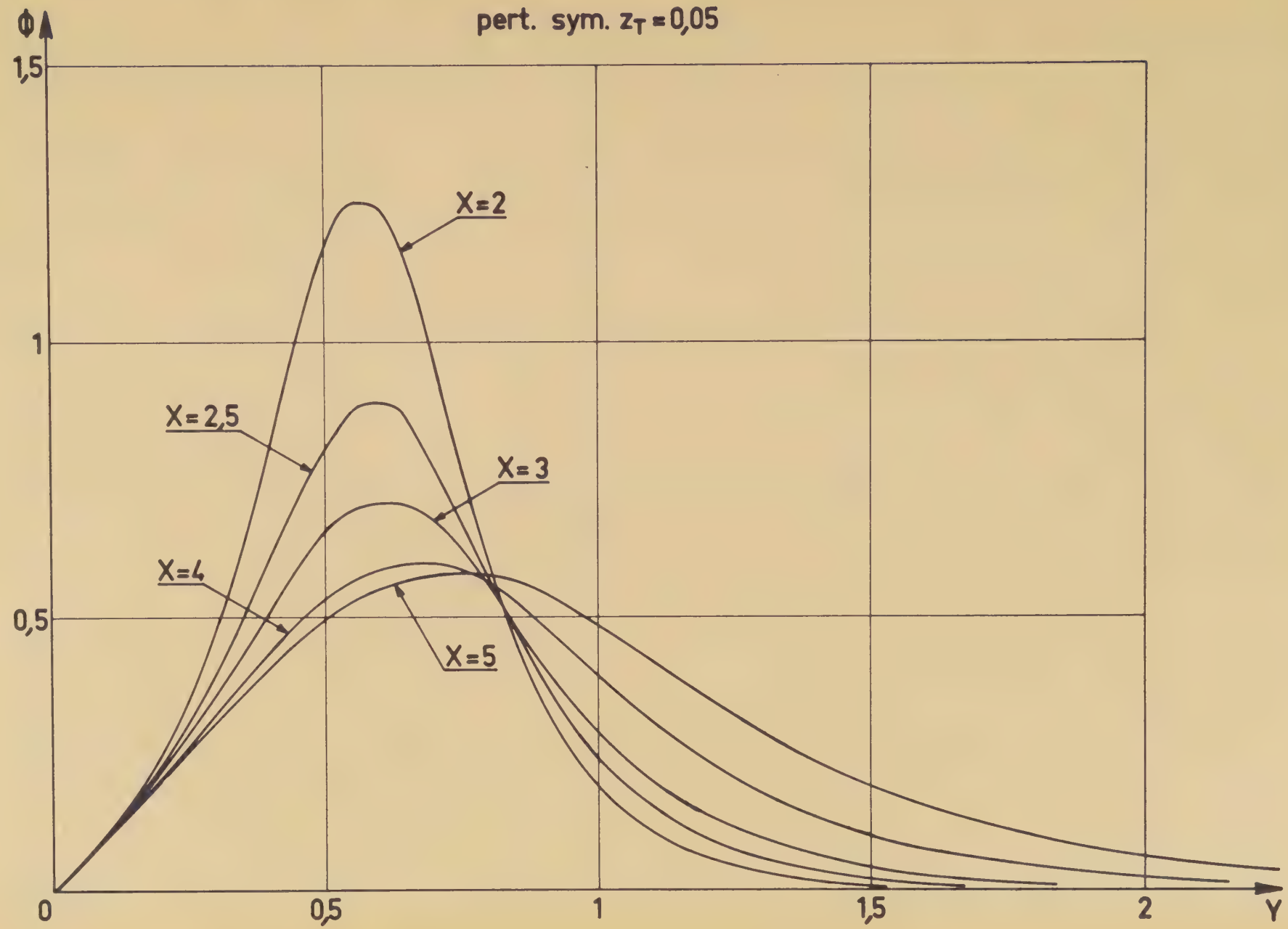


Fig.48

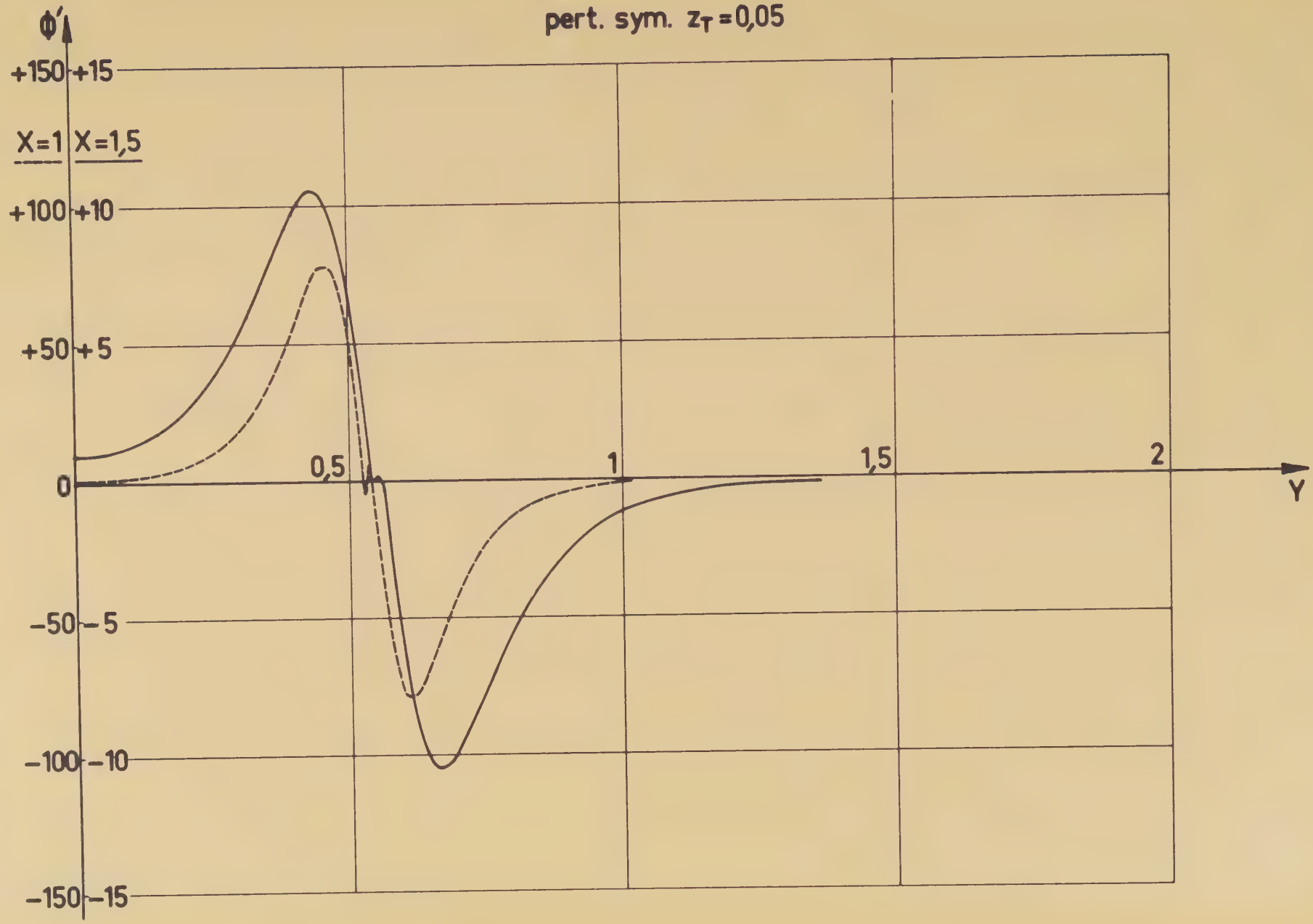

pert. sym. $z_T = 0,05$
Φ'
+150
+15
X=1
X=1,5
+100
+10
+50
+5
0
0,5
1
1,5
2
Y
-50
-5
-100
-10
-150
-15

Fig.49

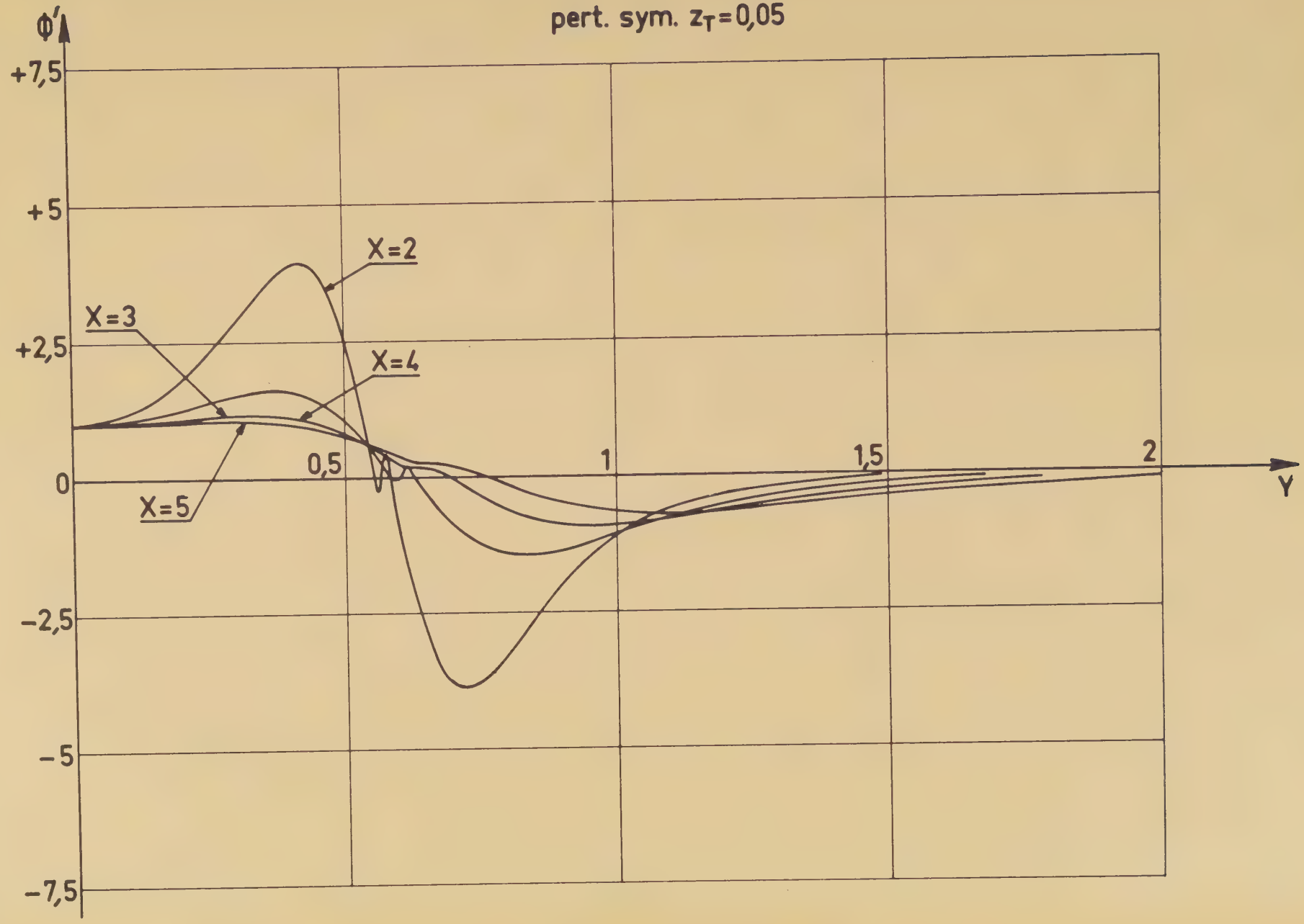


Fig.50

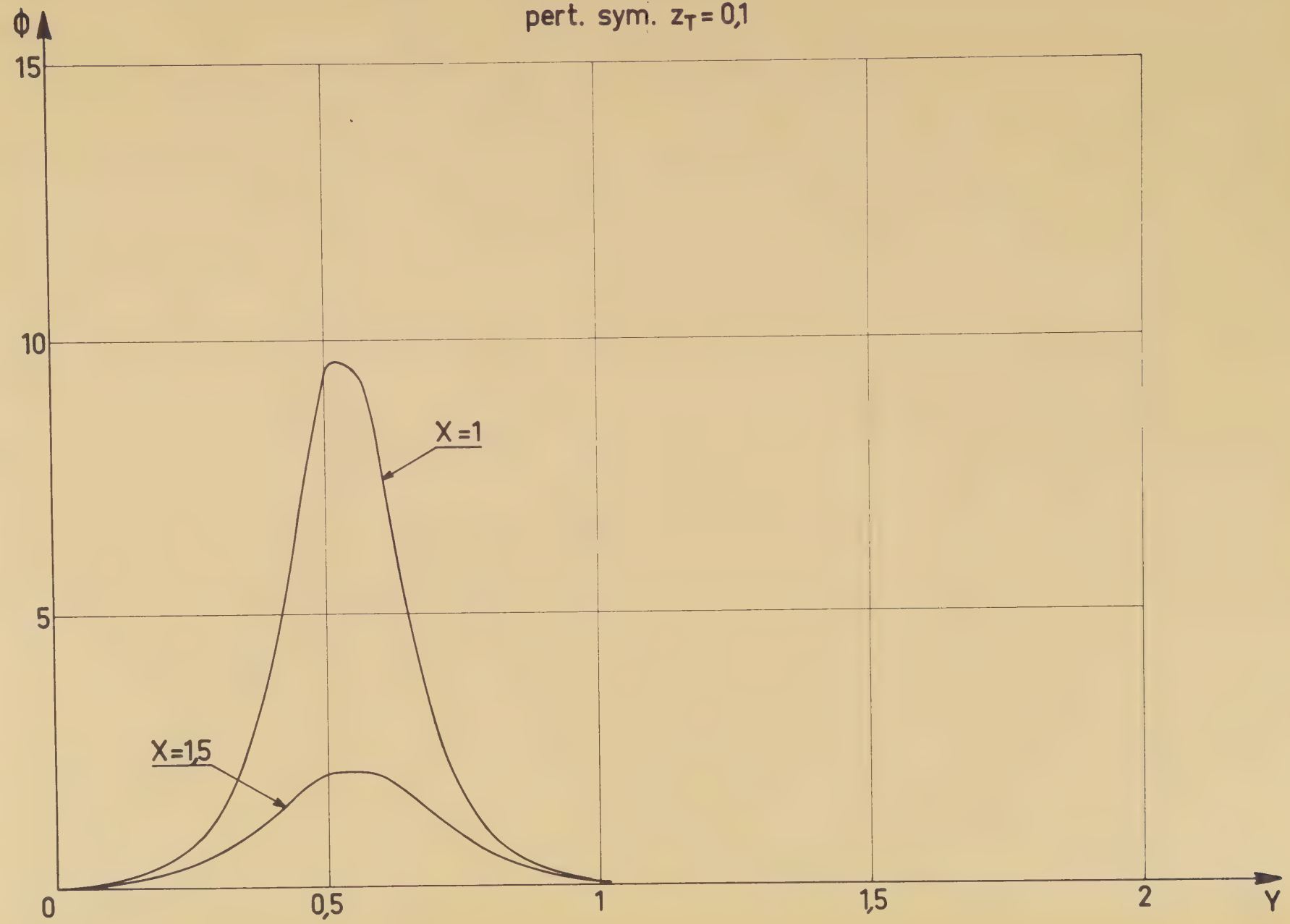


Fig. 51

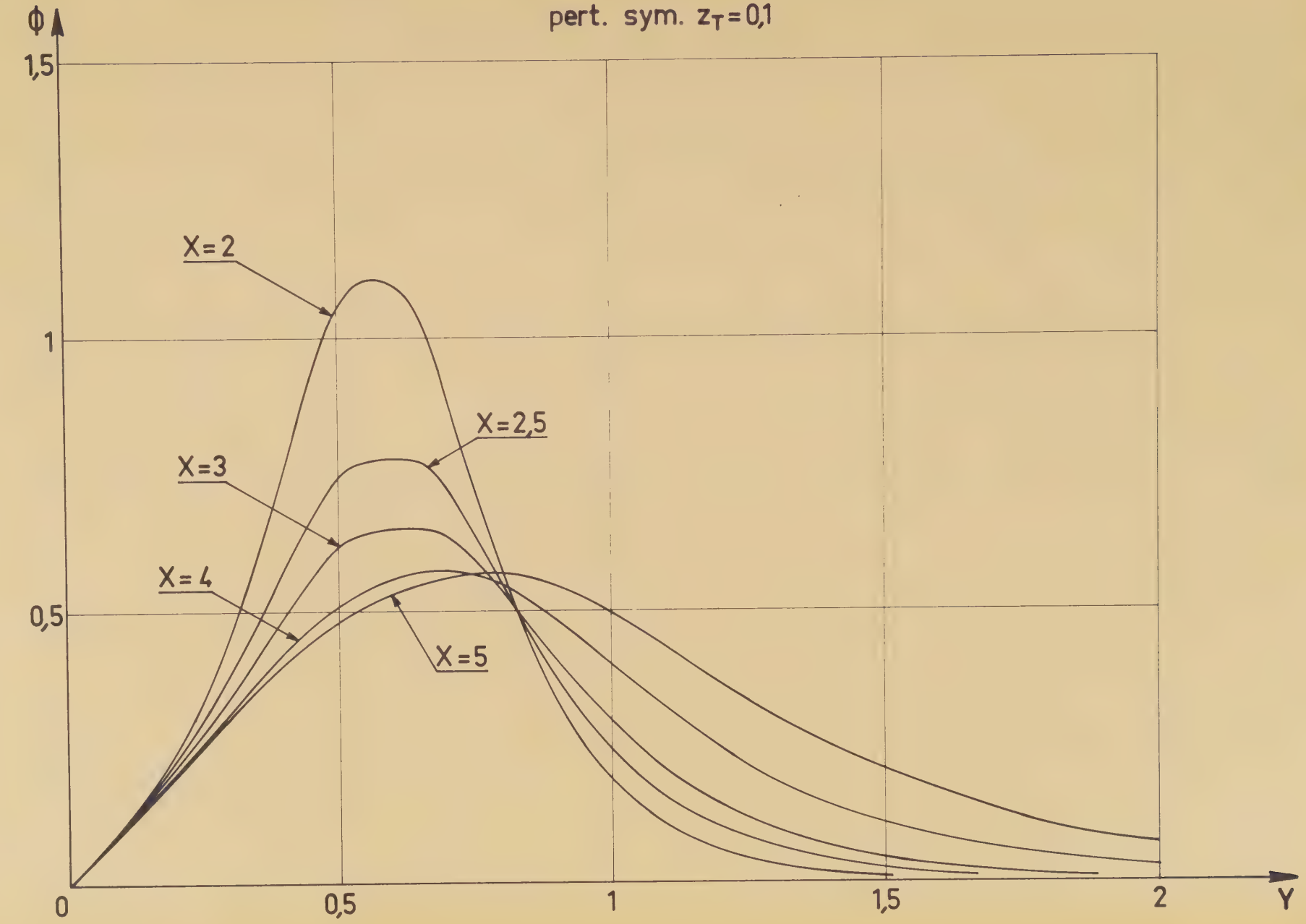


Fig.52

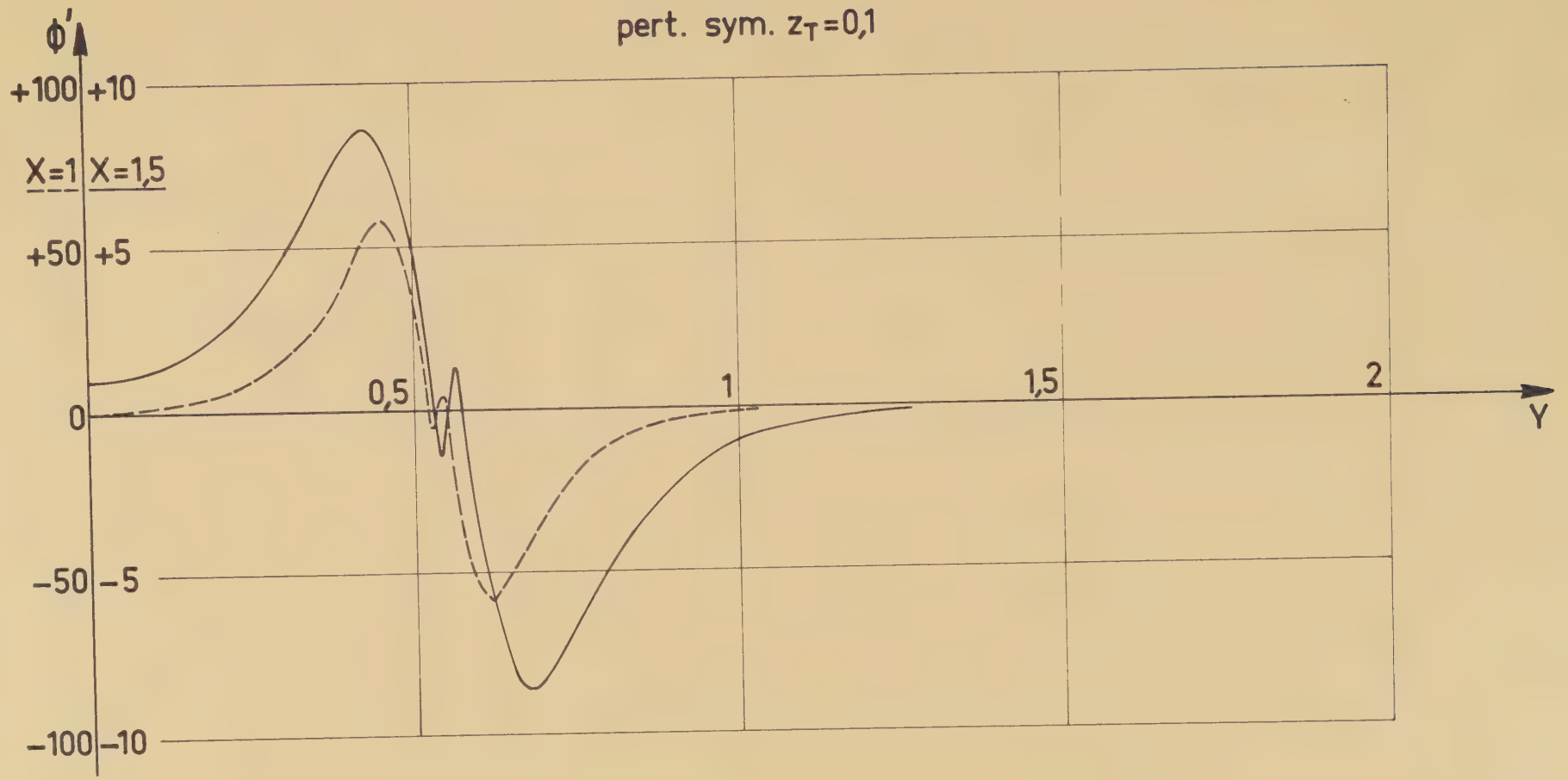


Fig.53

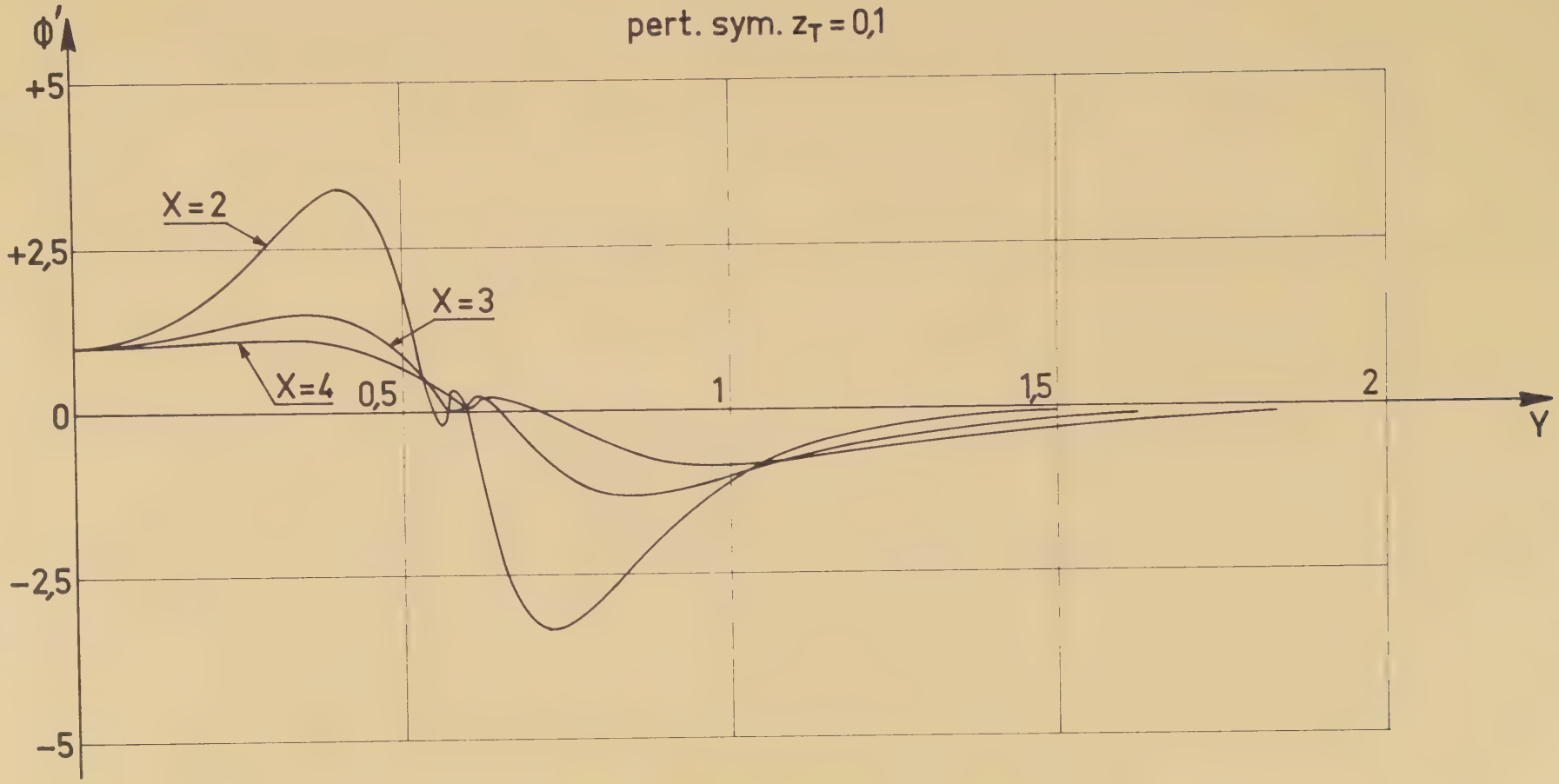


Fig. 54

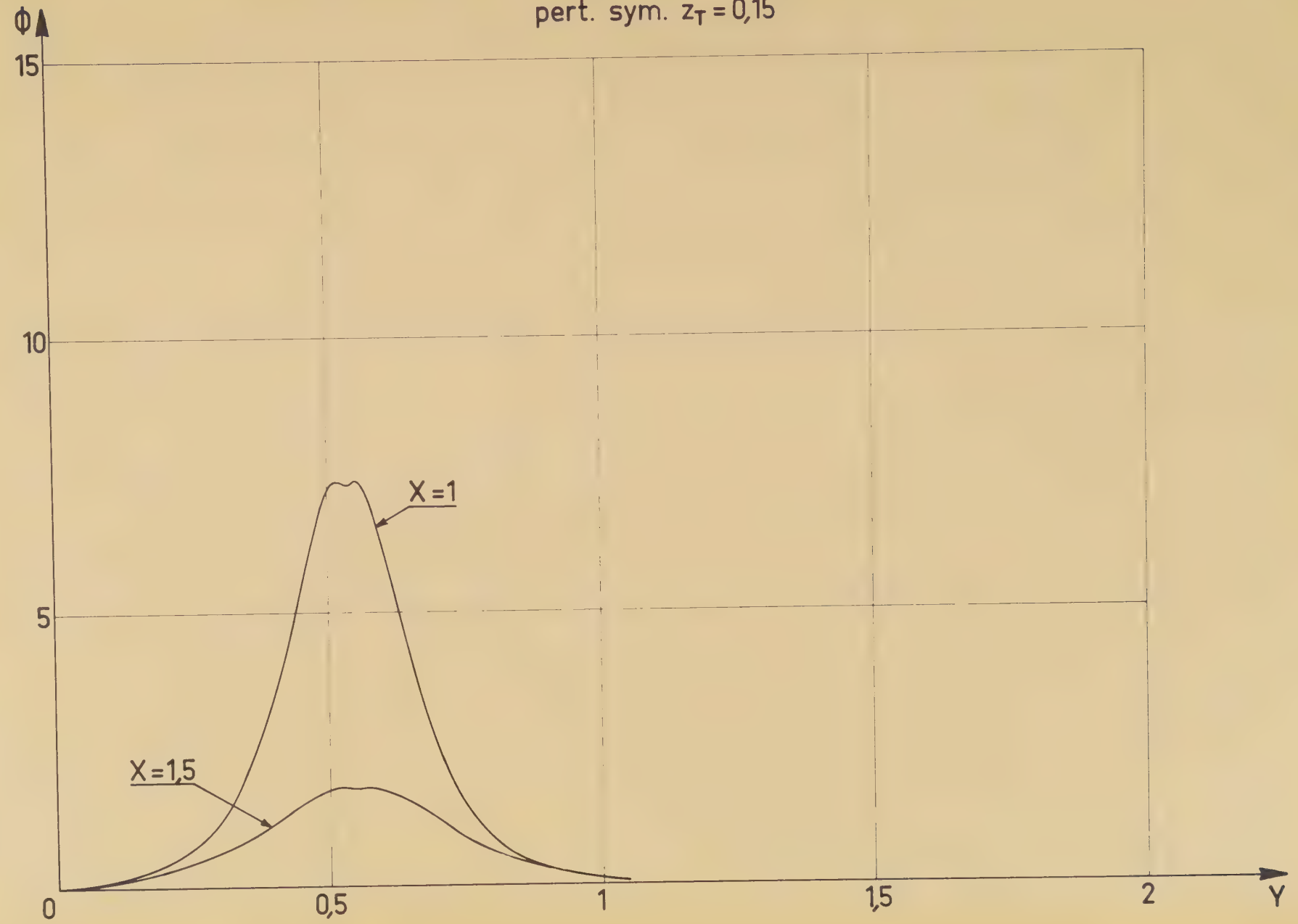


Fig.55

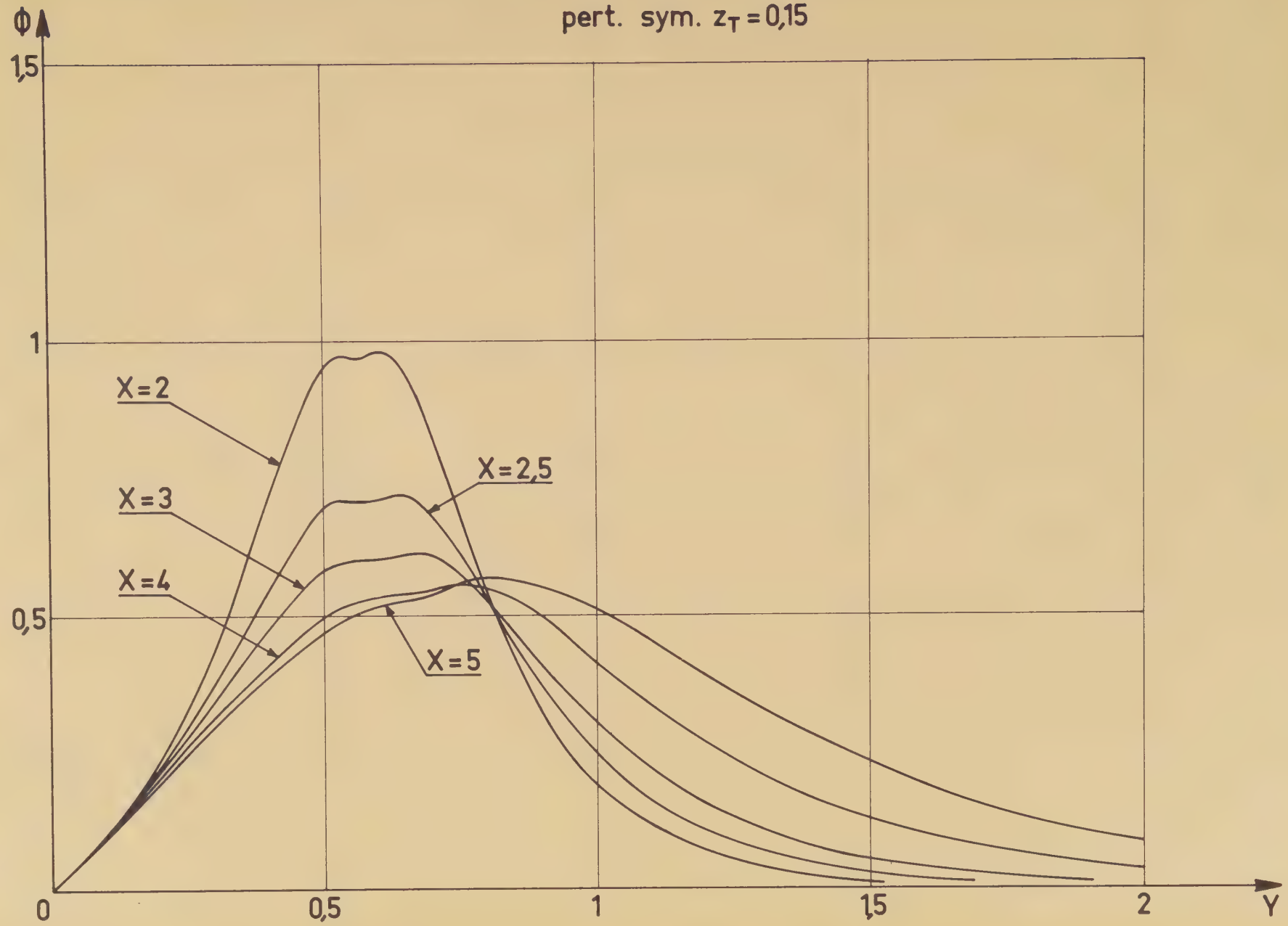


Fig.56

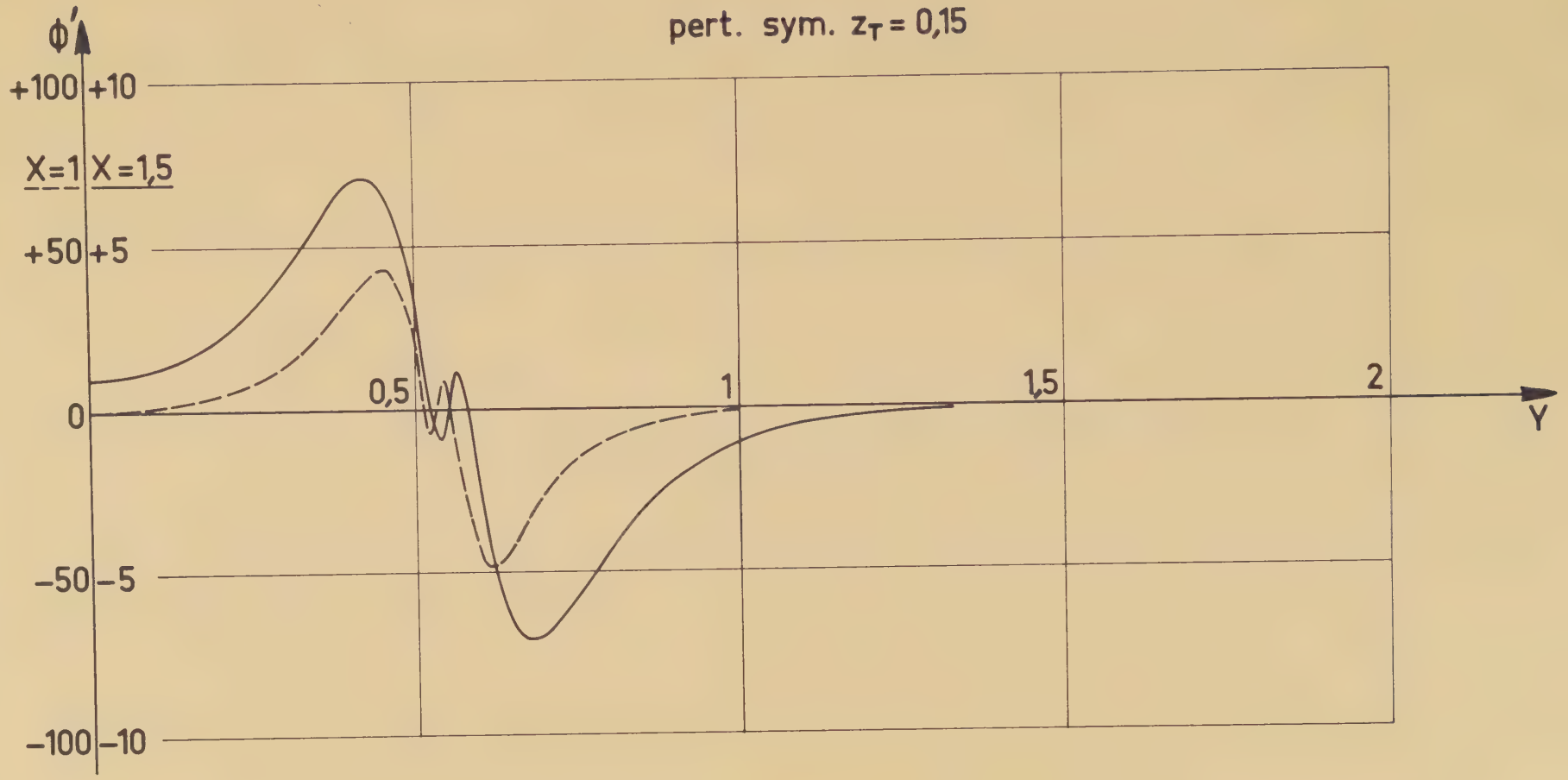


Fig.57

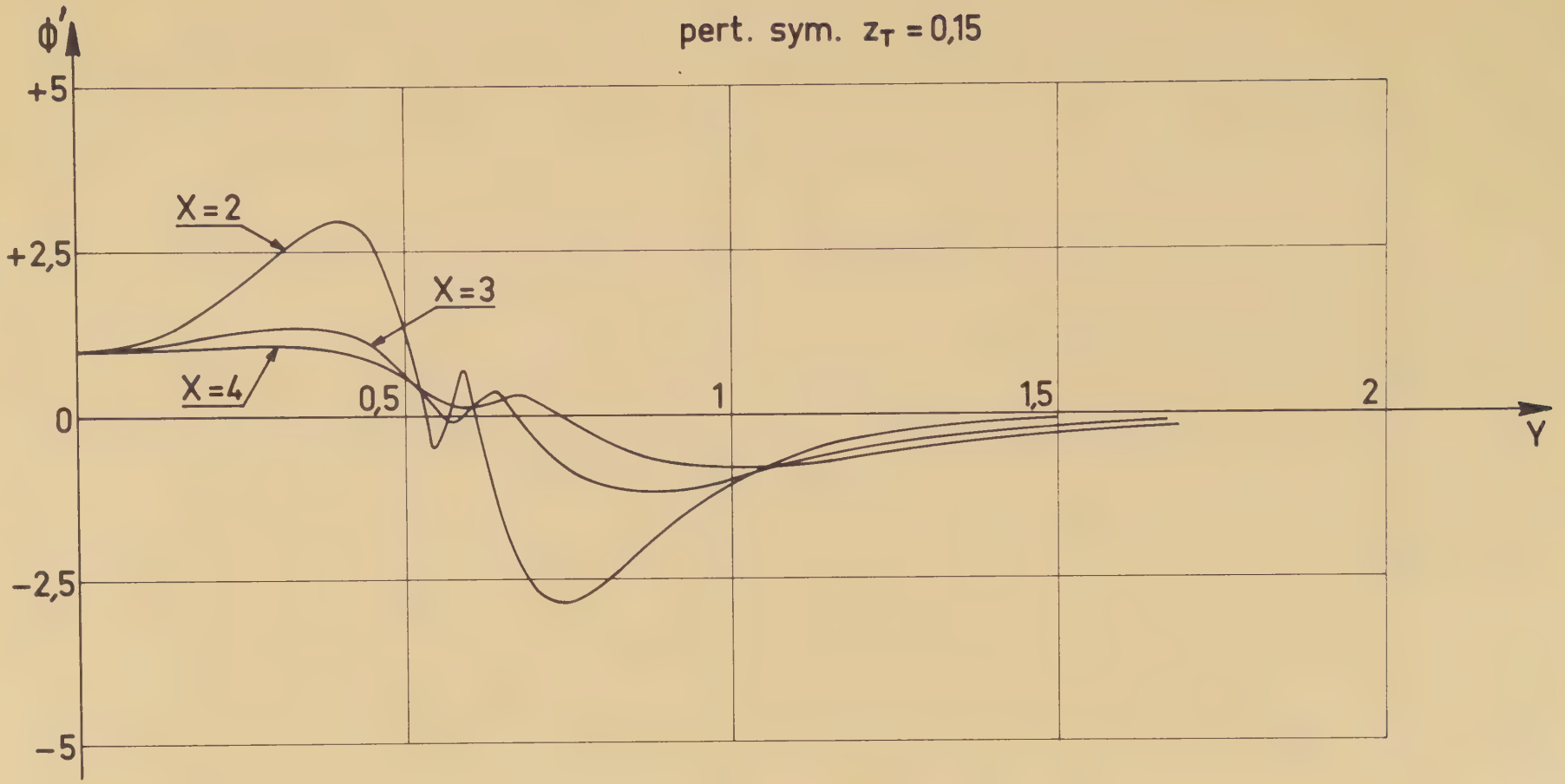


Fig.58

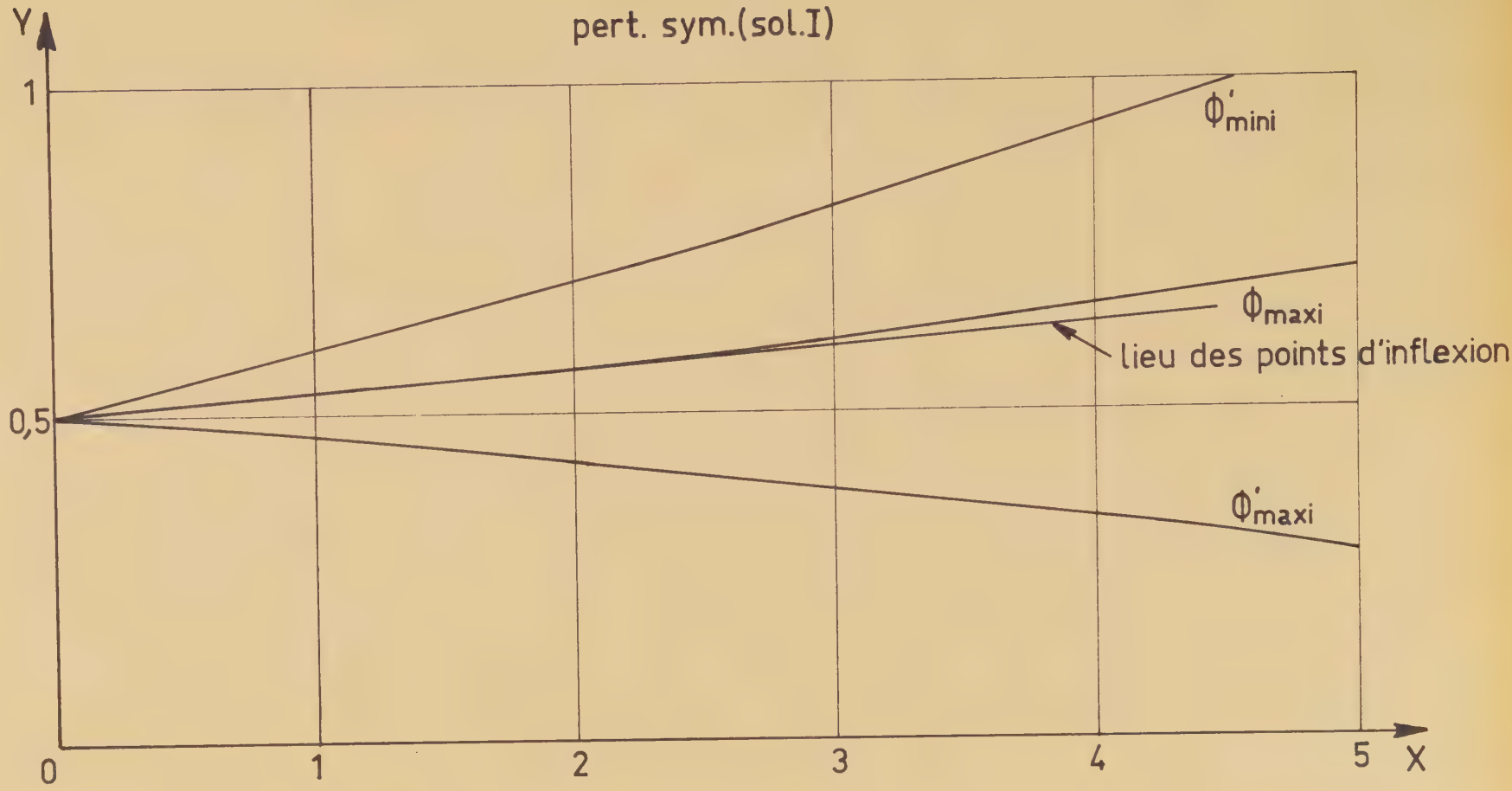
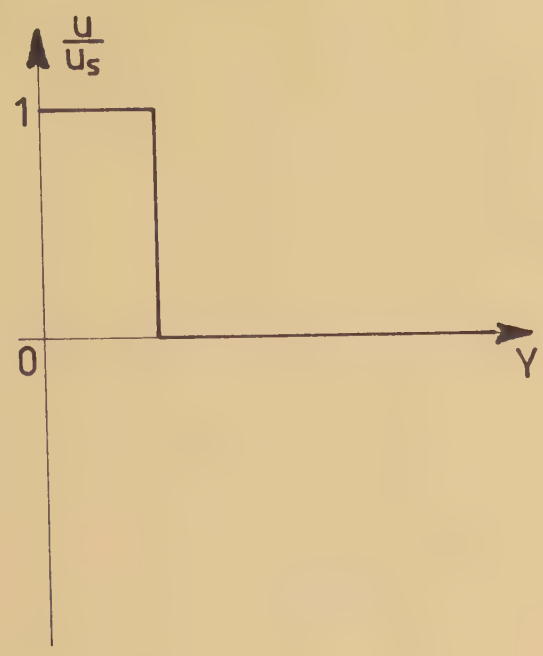
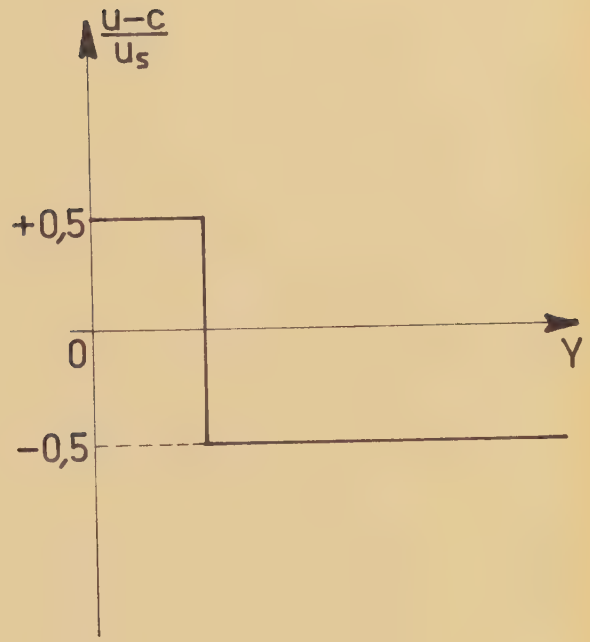
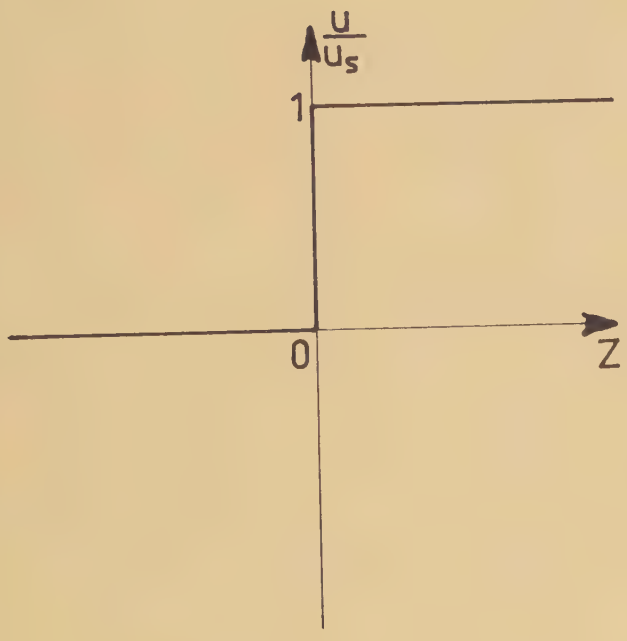

pert. sym.(sol.I)
Y
1
0,5
0
1
2
3
4
5
X
Φ'_{mini}
Φ_{maxi}
lieu des points d'inflexion
Φ'_{maxi}

Fig.59







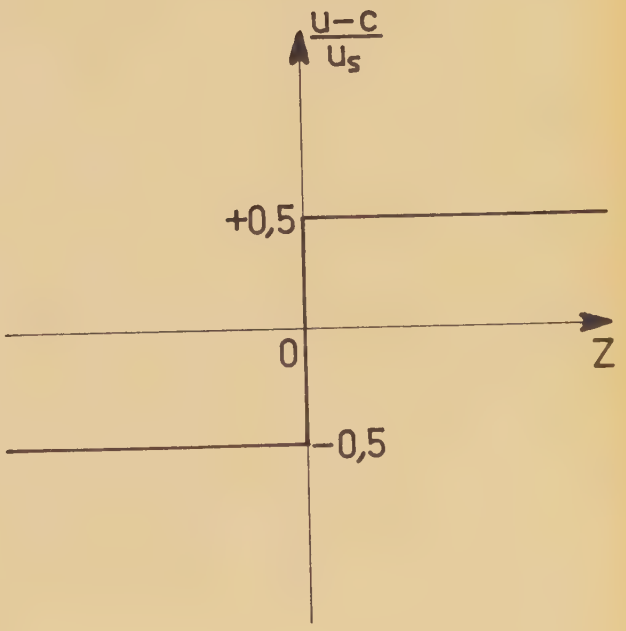


Fig.60

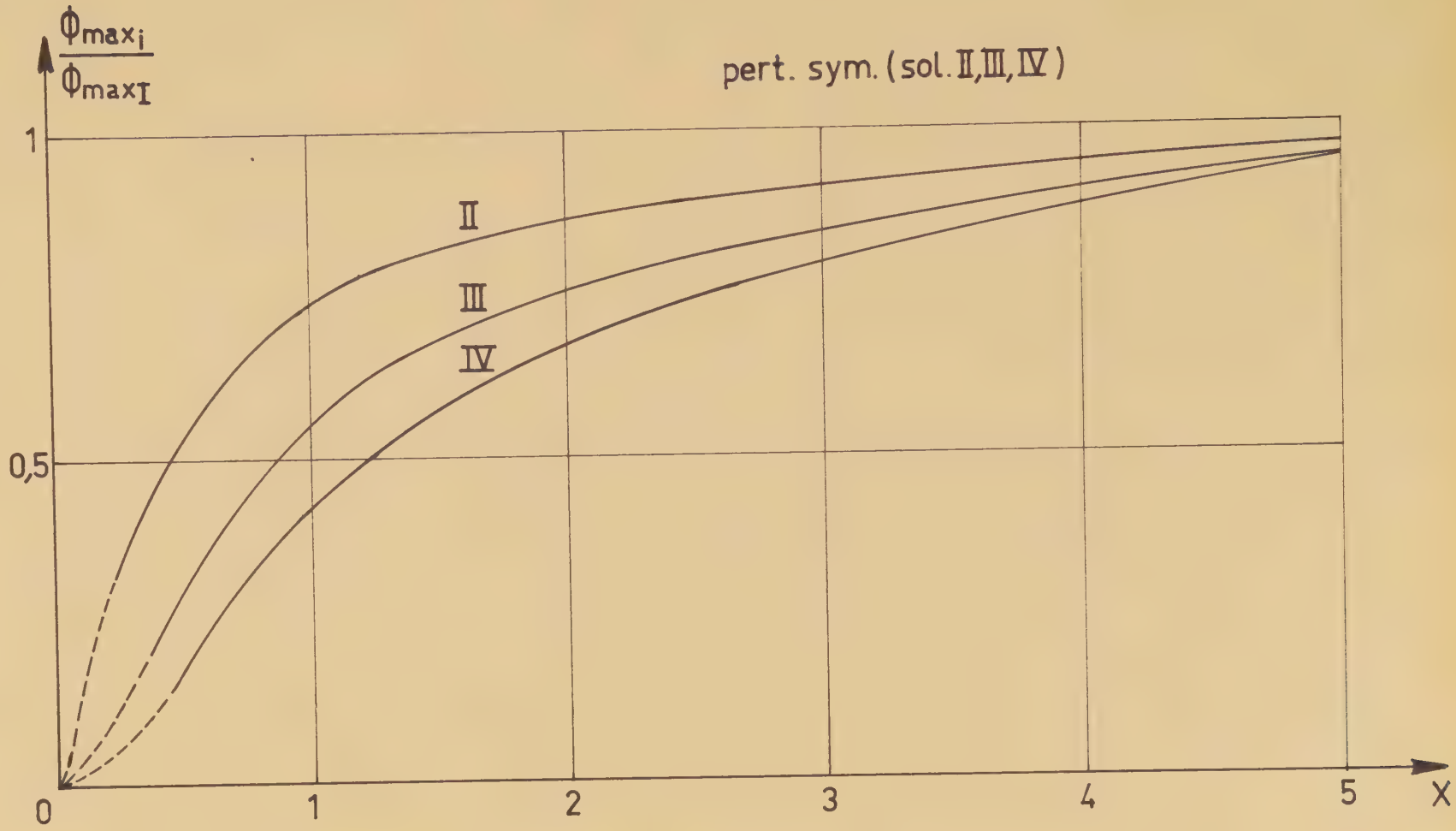

$\frac{\Phi_{max_i}}{\Phi_{max_I}}$
pert. sym. (sol. II, III, IV)
1
0,5
0
1
2
3
4
5
X
II
III
IV

Fig. 61

X	A			
	Sol. I	Sol. II	Sol. III	Sol. IV
0,5	1	0,905	0,818	0,740
1,0	1	0,905	0,818	0,740
1,5	0,9996	0,904	0,818	0,739
2,0	0,997	0,901	0,814	0,734
2,5	0,989	0,892	0,804	0,723
3,0	0,975	0,877	0,787	0,705
3,5	0,956	0,856	0,765	0,683
4,0	0,931	0,830	0,739	0,657
4,5	0,903	0,803	0,712	0,630
5,0	0,874	0,774	0,684	0,604

A(X) pour une perturbation symètrique

Fig.62

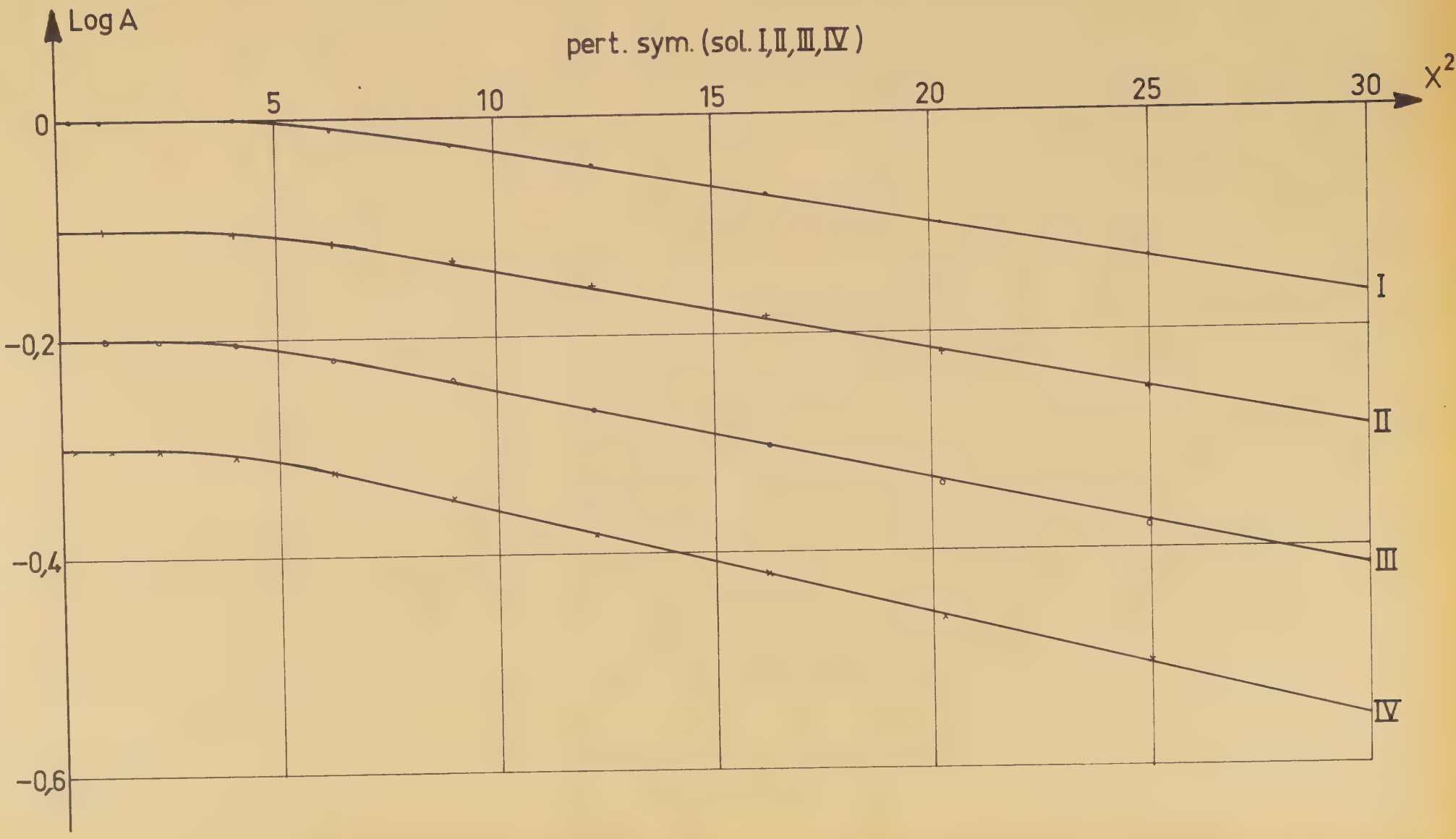

Log A
pert. sym. (sol. I,II,III,IV)
X²
5
10
15
20
25
30
0
−0,2
−0,4
−0,6
I
II
III
IV

Fig. 63

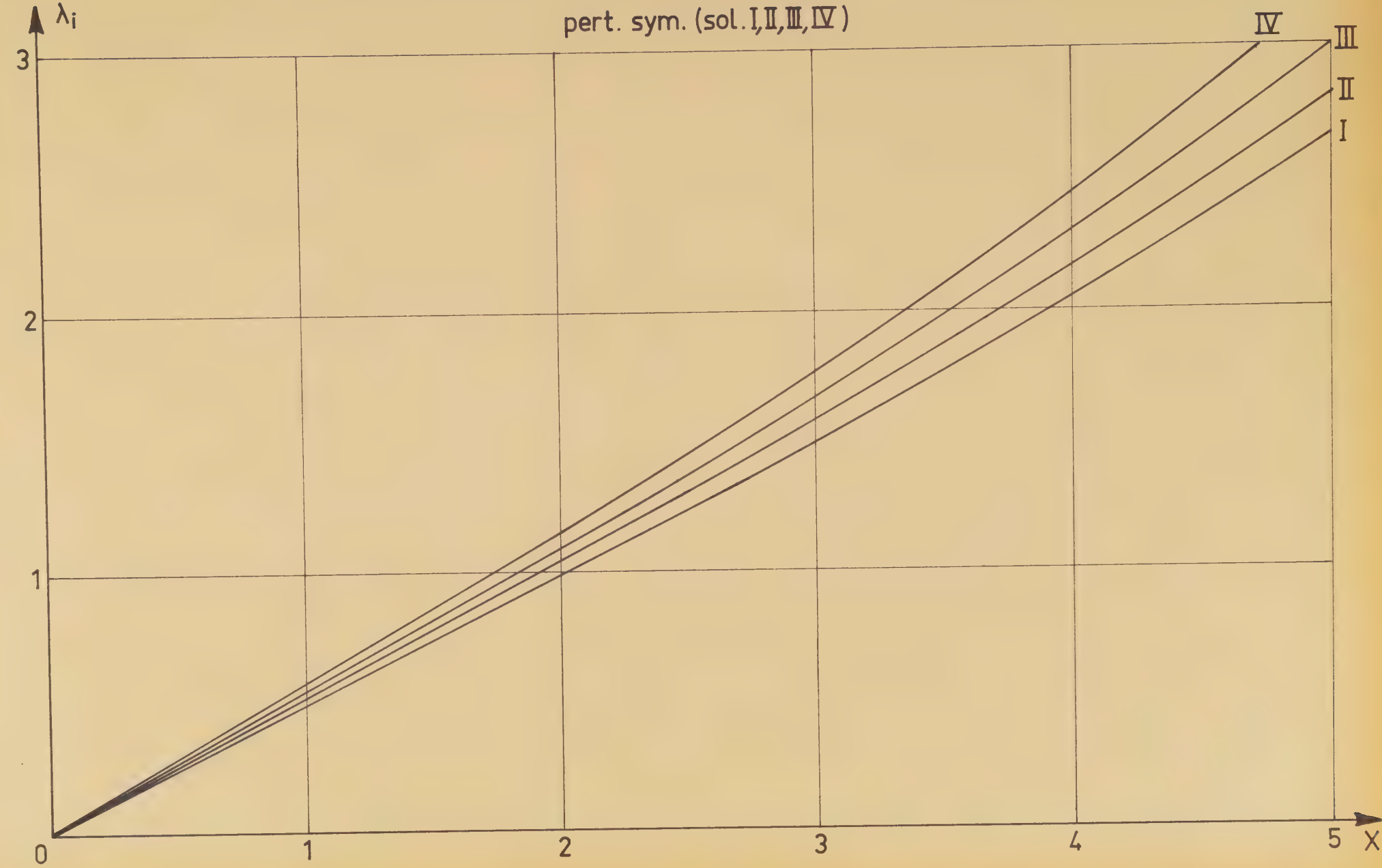


Fig. 64

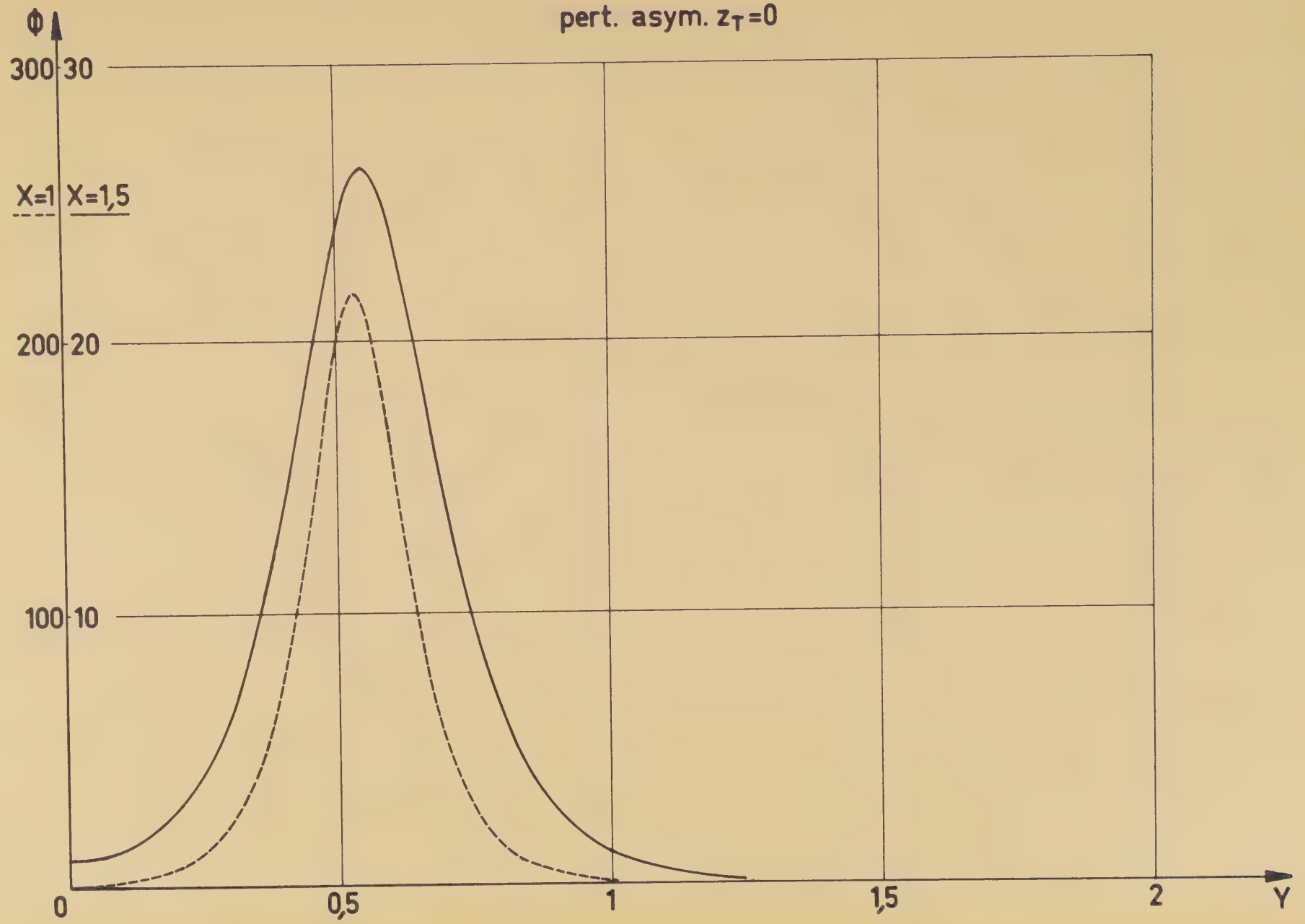


Fig.65

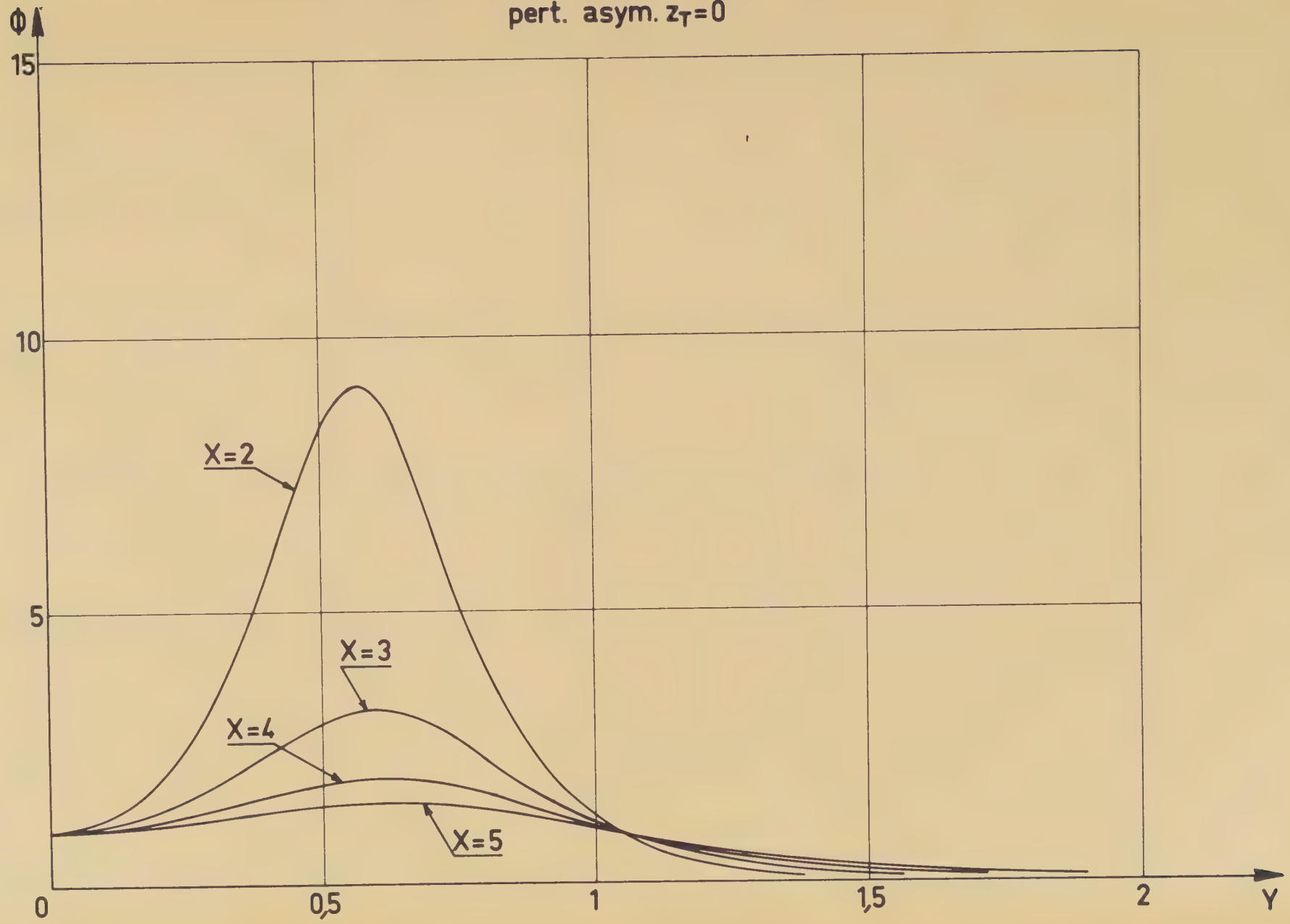


Fig.66

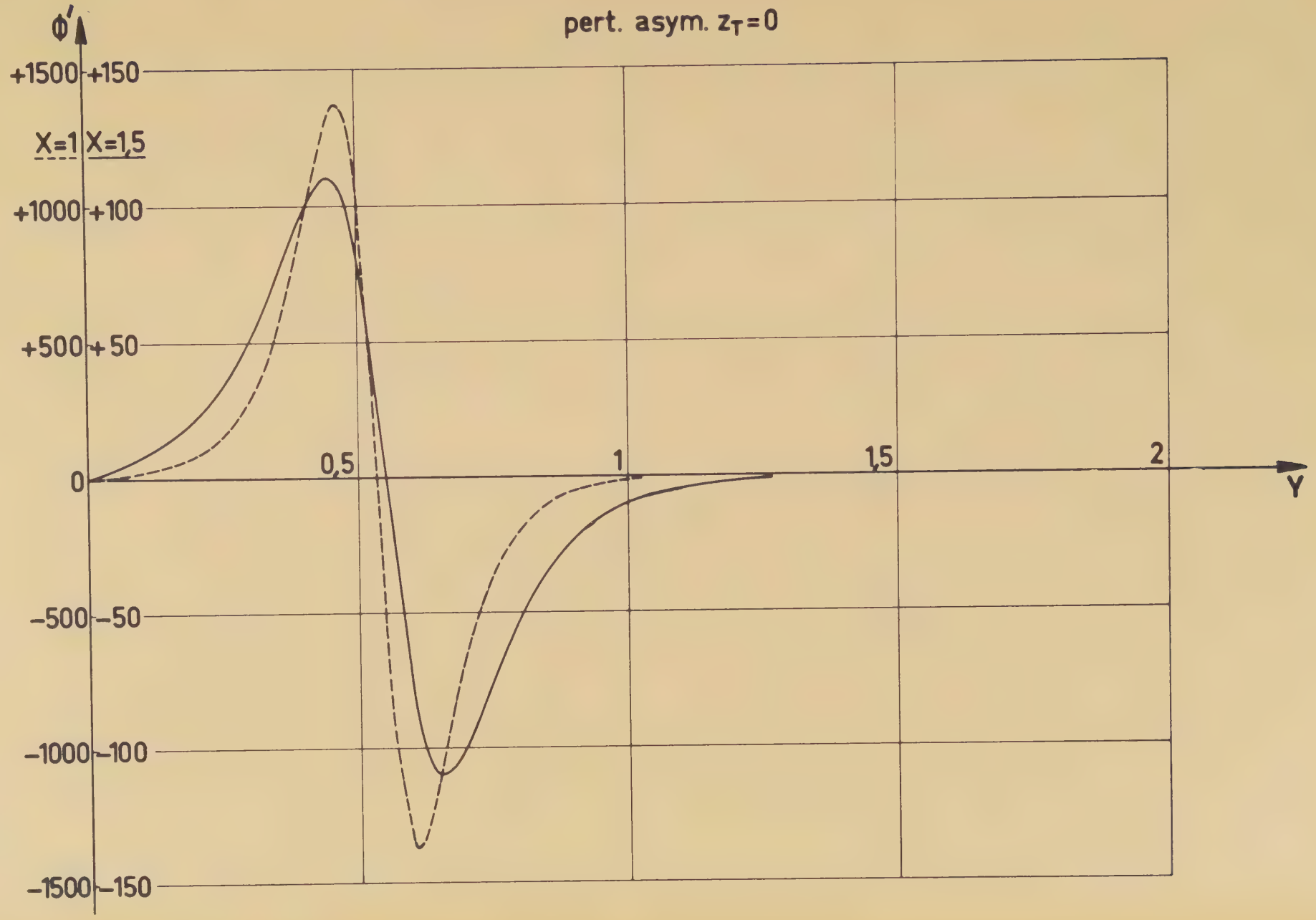

pert. asym. $z_T = 0$
Φ'
+1500
+150
X=1
X=1,5
+1000
+100
+500
+50
0
0,5
1
1,5
2
Y
−500
−50
−1000
−100
−1500
−150

Fig.67

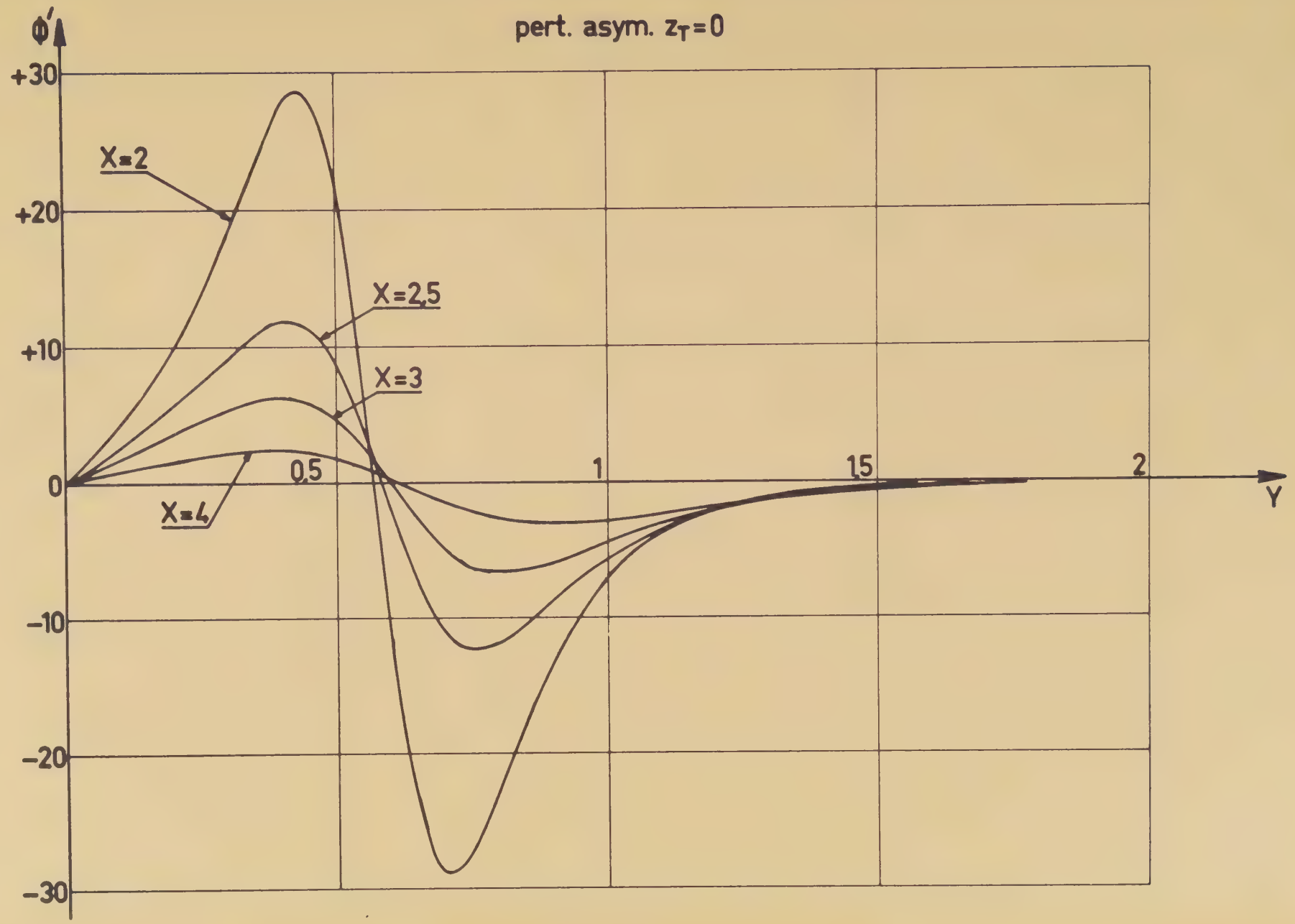


Fig.68

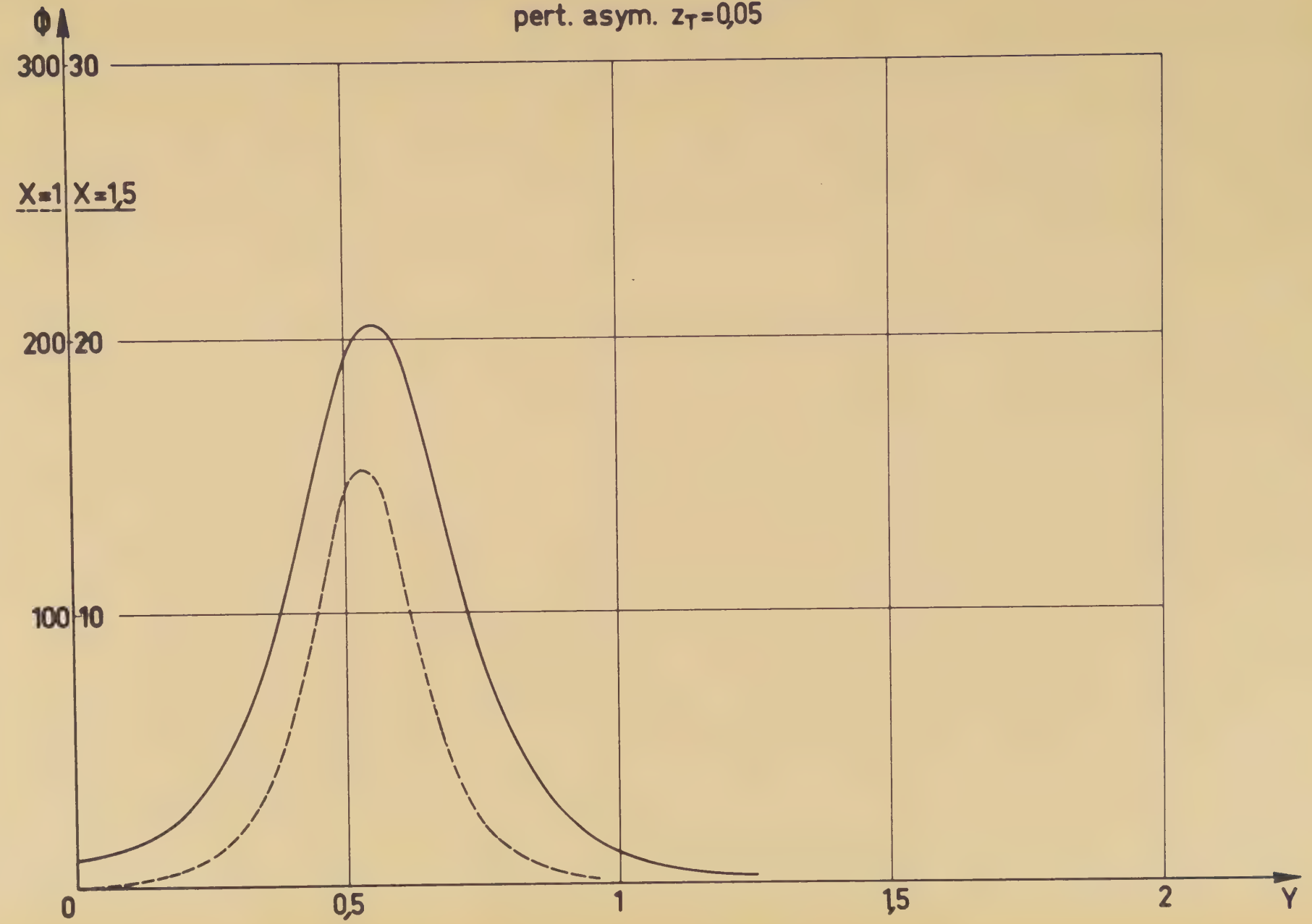


Fig.69

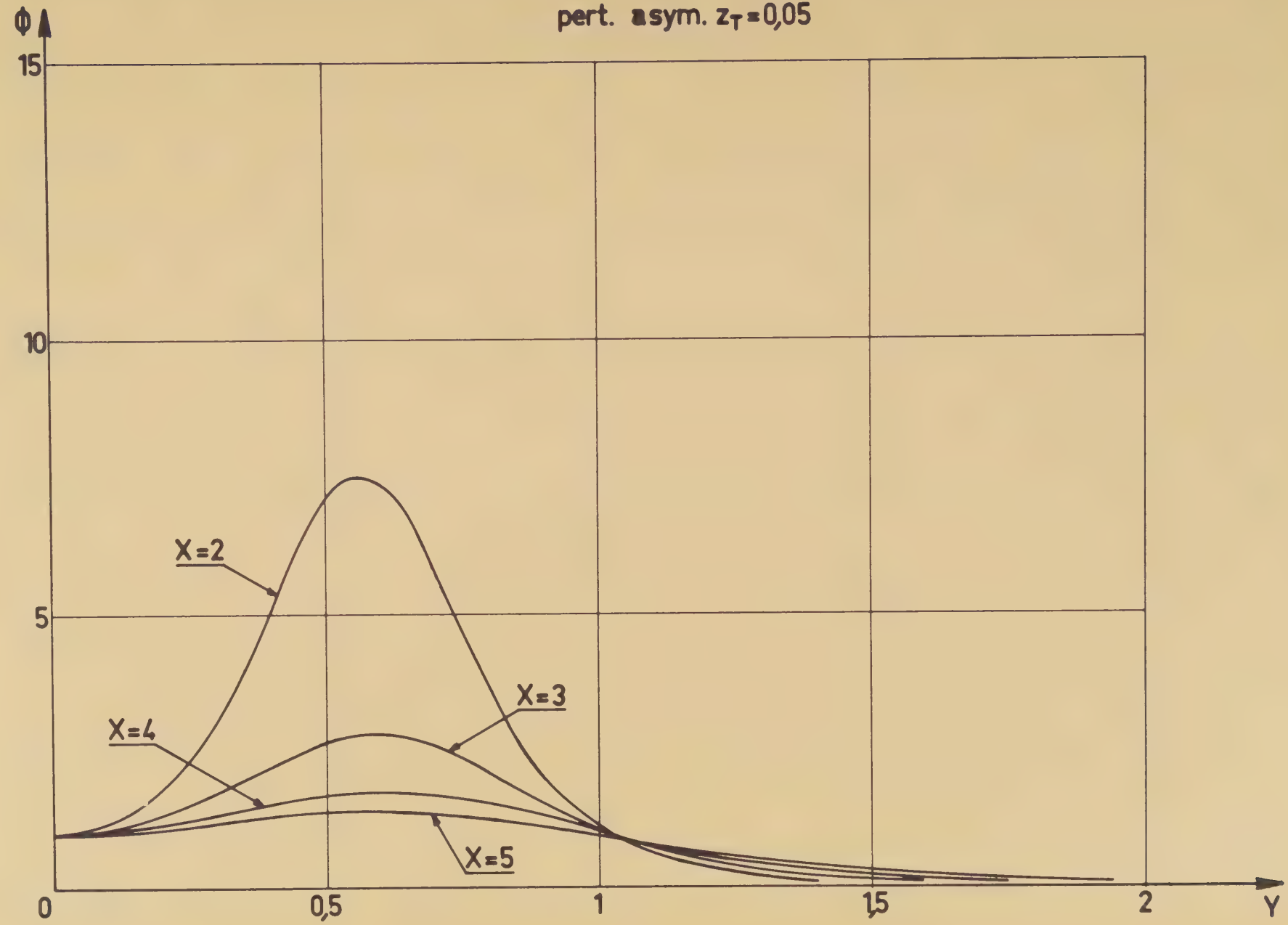


Fig.70

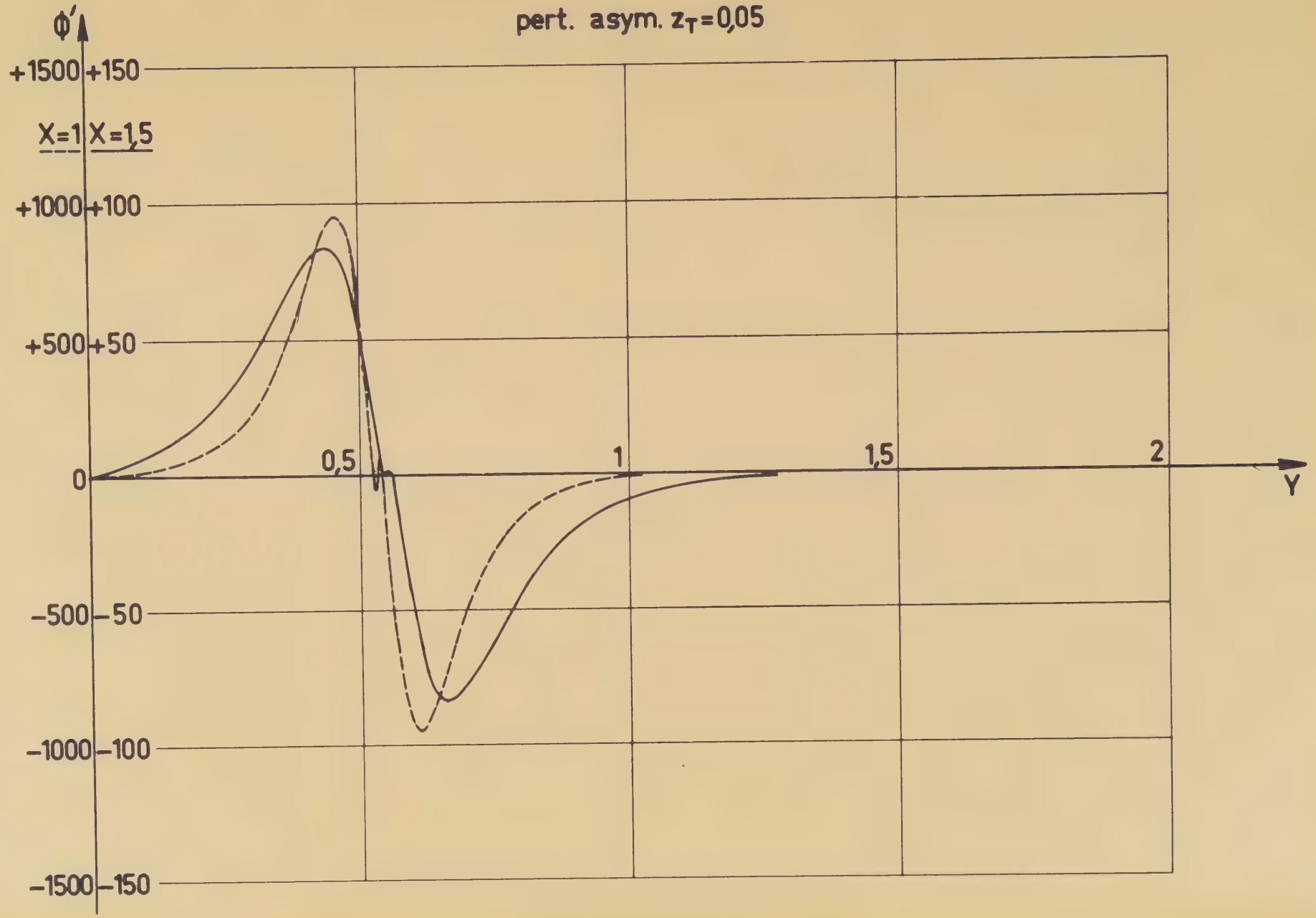

pert. asym. z_T=0,05
Φ'
+1500
+150
X=1
X=1,5
+1000
+100
+500
+50
0
0,5
1
1,5
2
Y
-500
-50
-1000
-100
-1500
-150

Fig.71

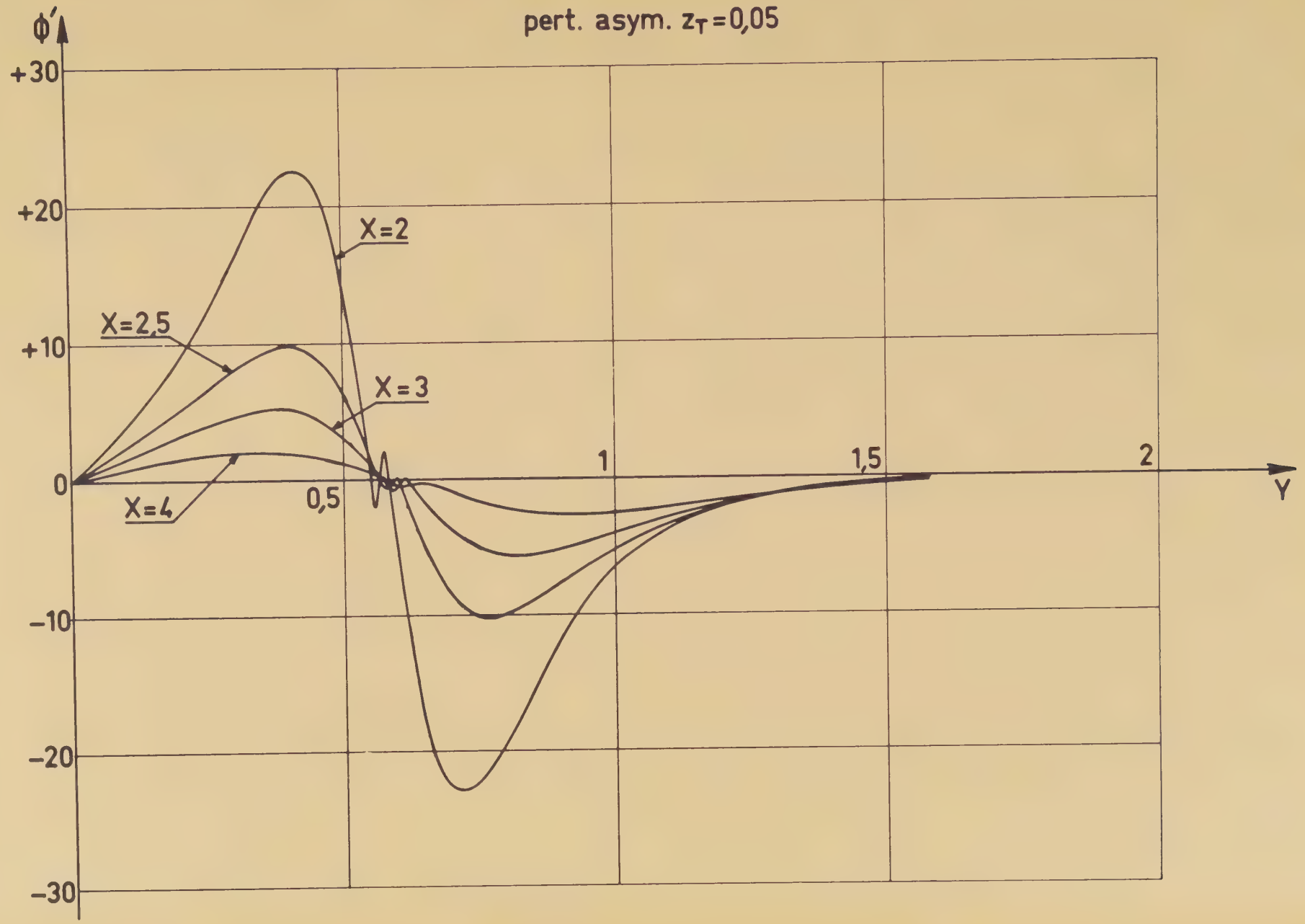


Fig.72

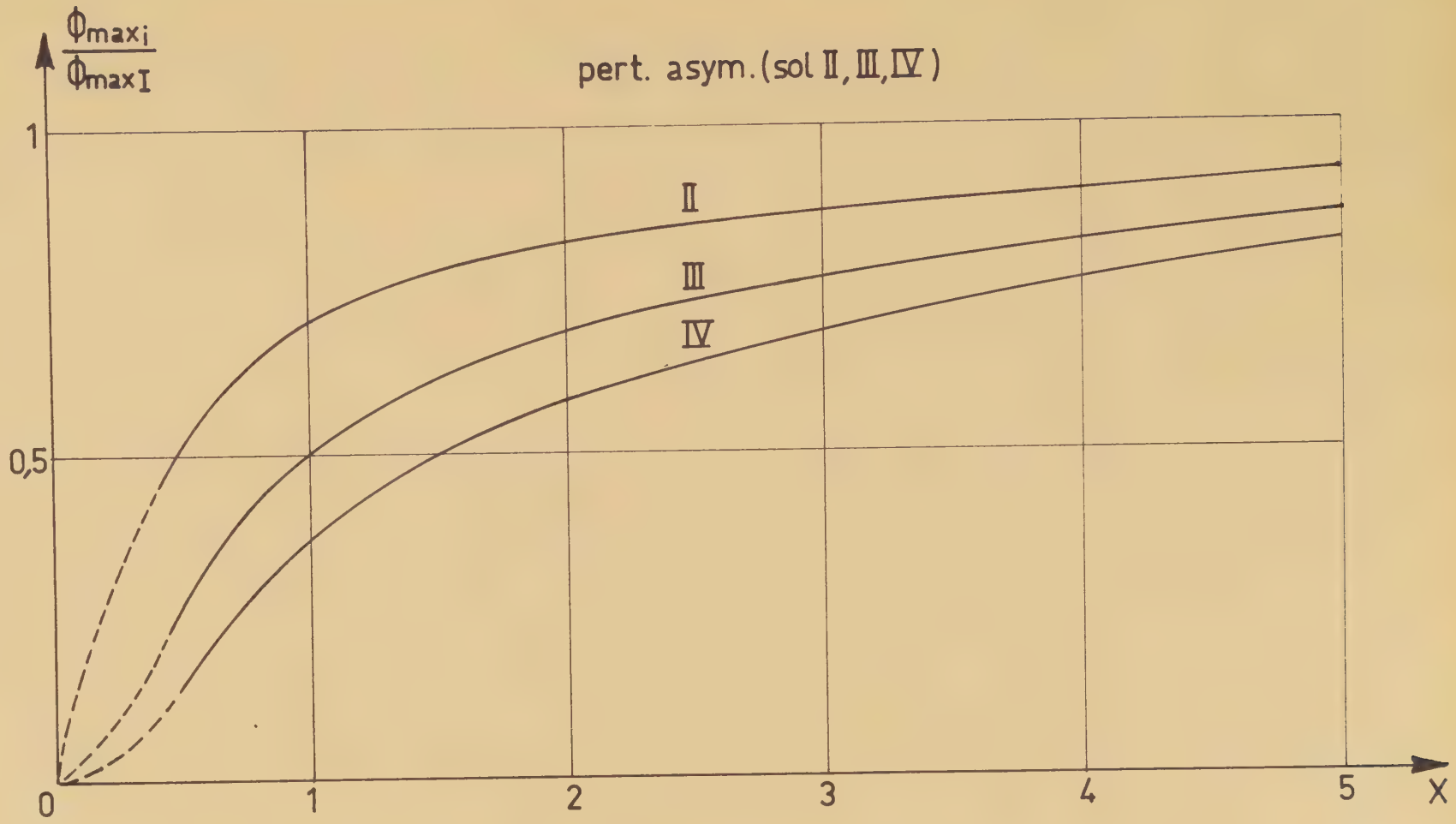

$\frac{\Phi_{max\,i}}{\Phi_{max\,I}}$
pert. asym. (sol II, III, IV)
1
0,5
0
1
2
3
4
5
X
II
III
IV

Fig.73

X	A			
	Sol. I	Sol. II	Sol. III	Sol. IV
0,5	1	0,905	0,818	0,740
1,0	1	0,905	0,818	0,740
1,5	1,0004	0,905	0,819	0,741
2,0	1,003	0,909	0,823	0,746
2,5	1,011	0,917	0,833	0,756
3,0	1,034	0,932	0,848	0,773
3,5	1,043	0,951	0,869	0,793
4,0	1,064	0,974	0,891	0,816
4,5	1,088	0,997	0,914	0,838
5,0	1,112	1,020	0,937	0,860

A(X) pour une perturbation antisymétrique

Fig.74

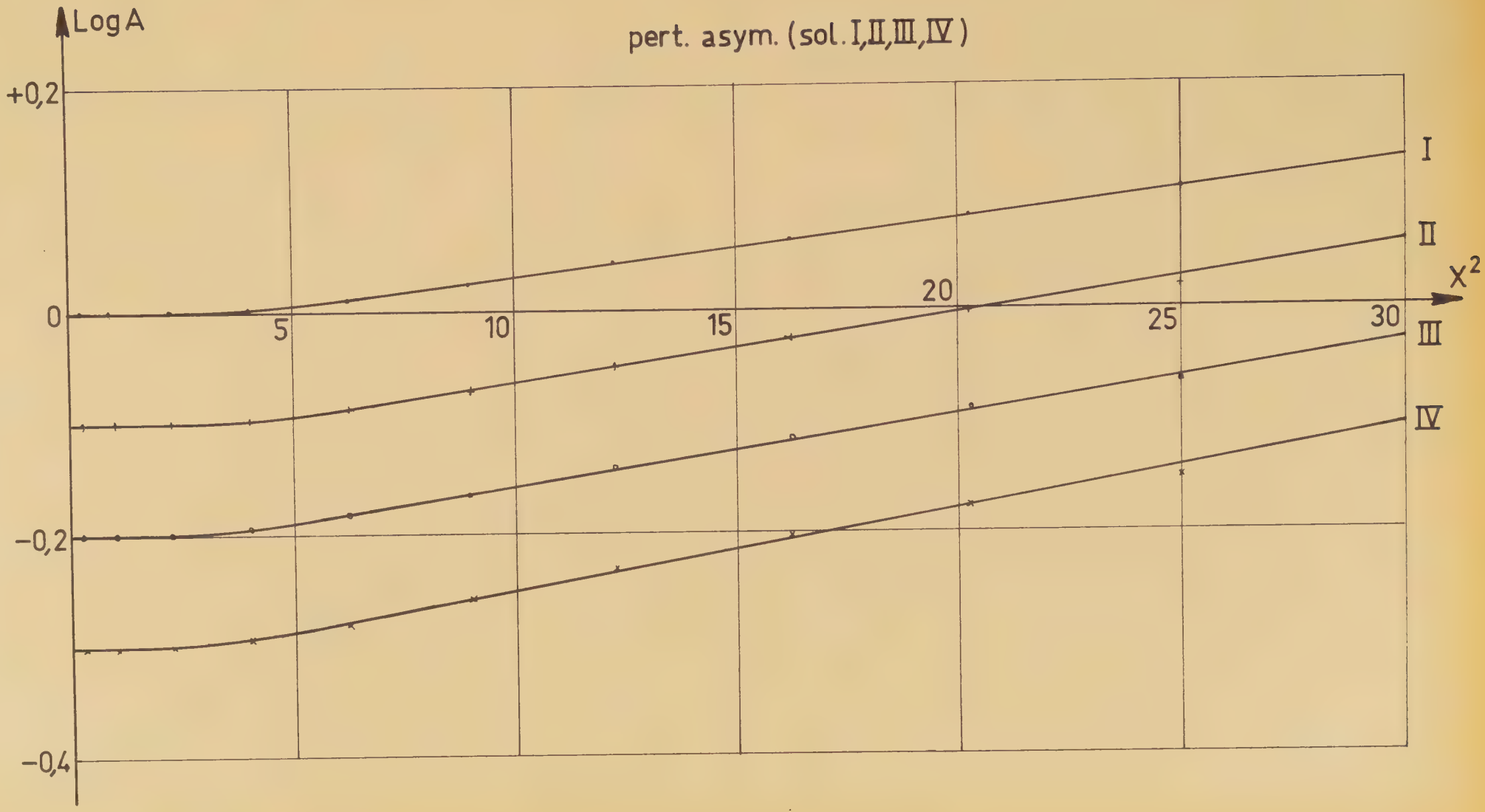

Log A
pert. asym. (sol. I,II,III,IV)
+0,2
0
−0,2
−0,4
5
10
15
20
25
30
X^2
I
II
III
IV

Fig. 75

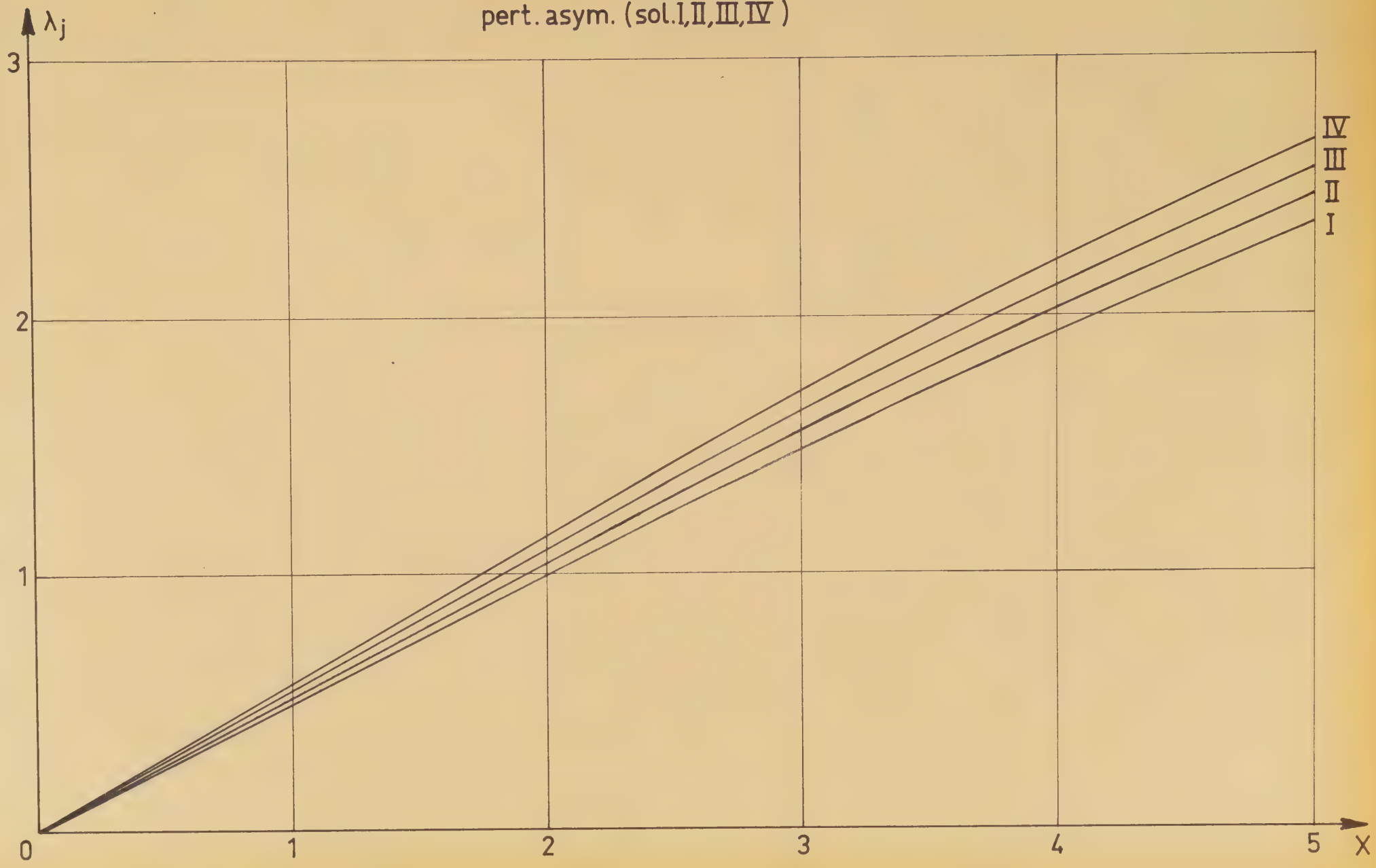
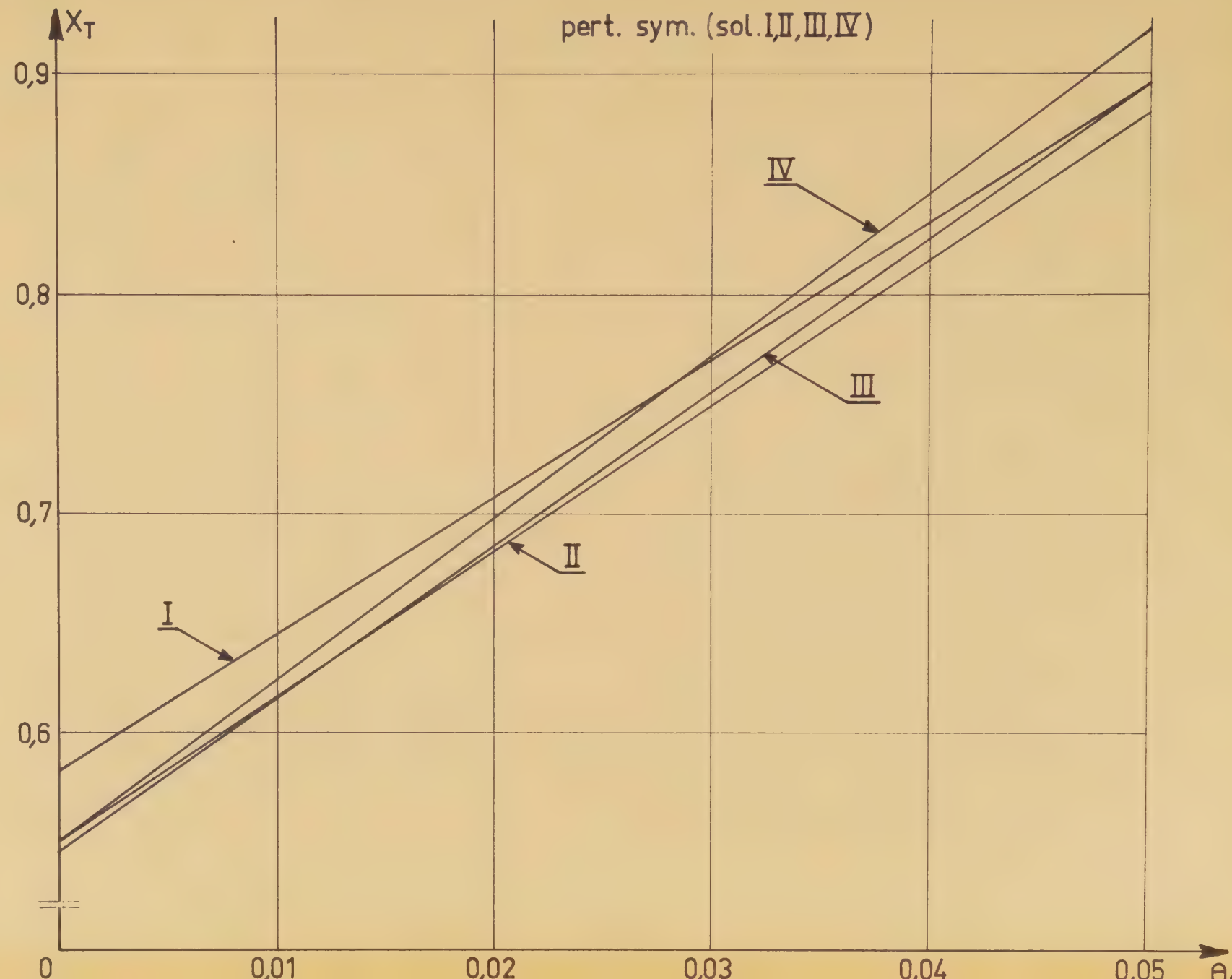
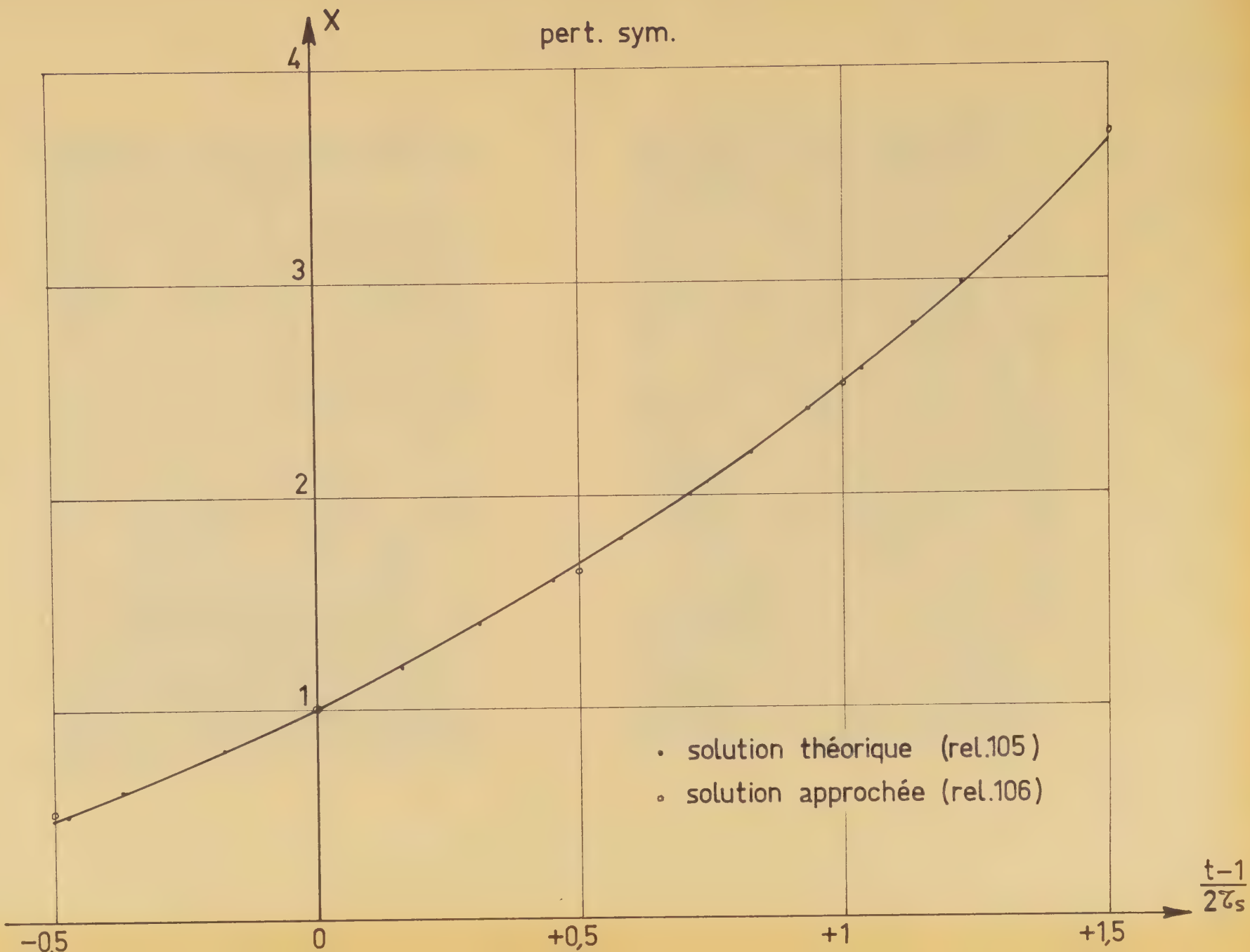


Fig.76



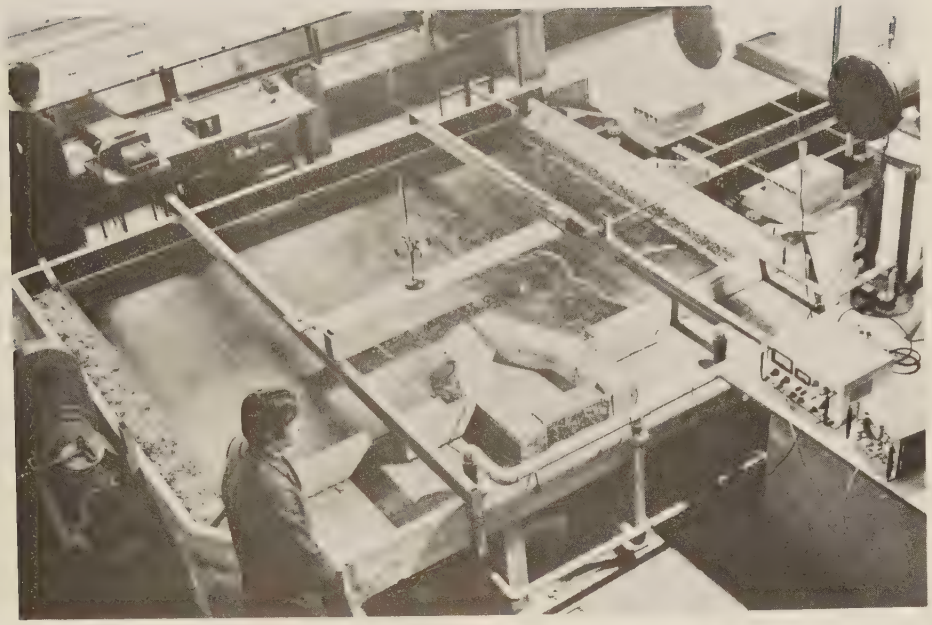
Abscisse X_T de formation des tourbillons

Fig.77



Abscisse X des tourbillons à l'instant t

Fig.78



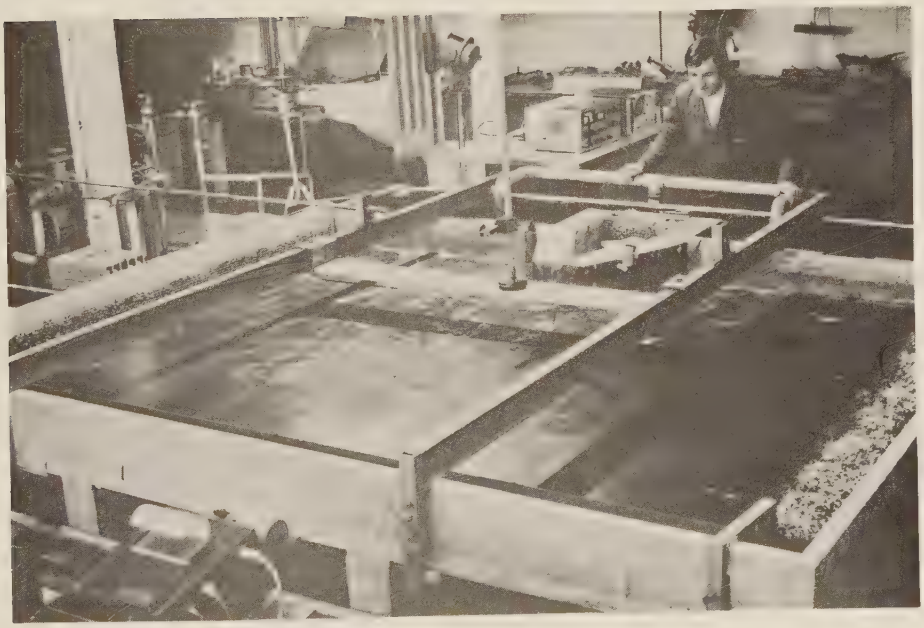


Fig.79

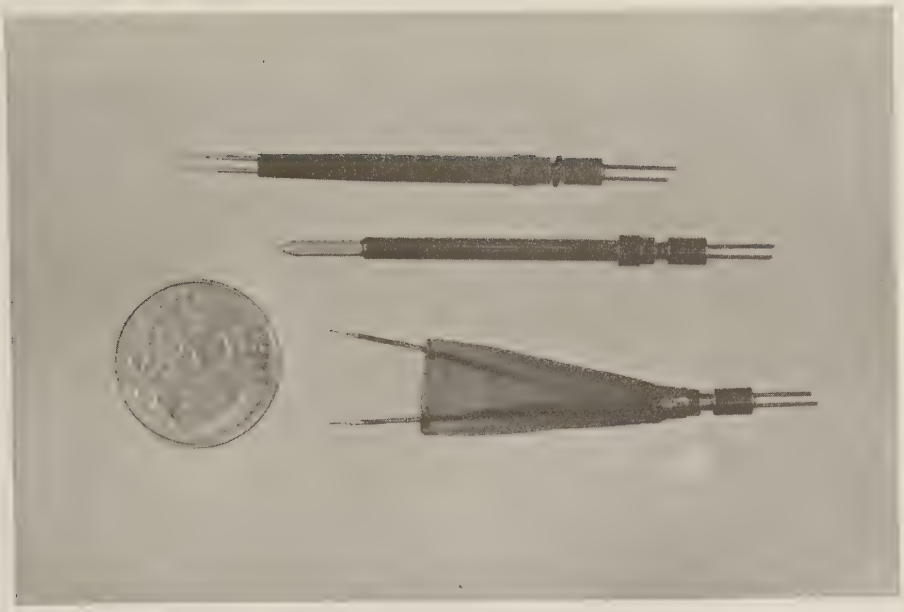


Fig.80

Fig.81

Fig.82

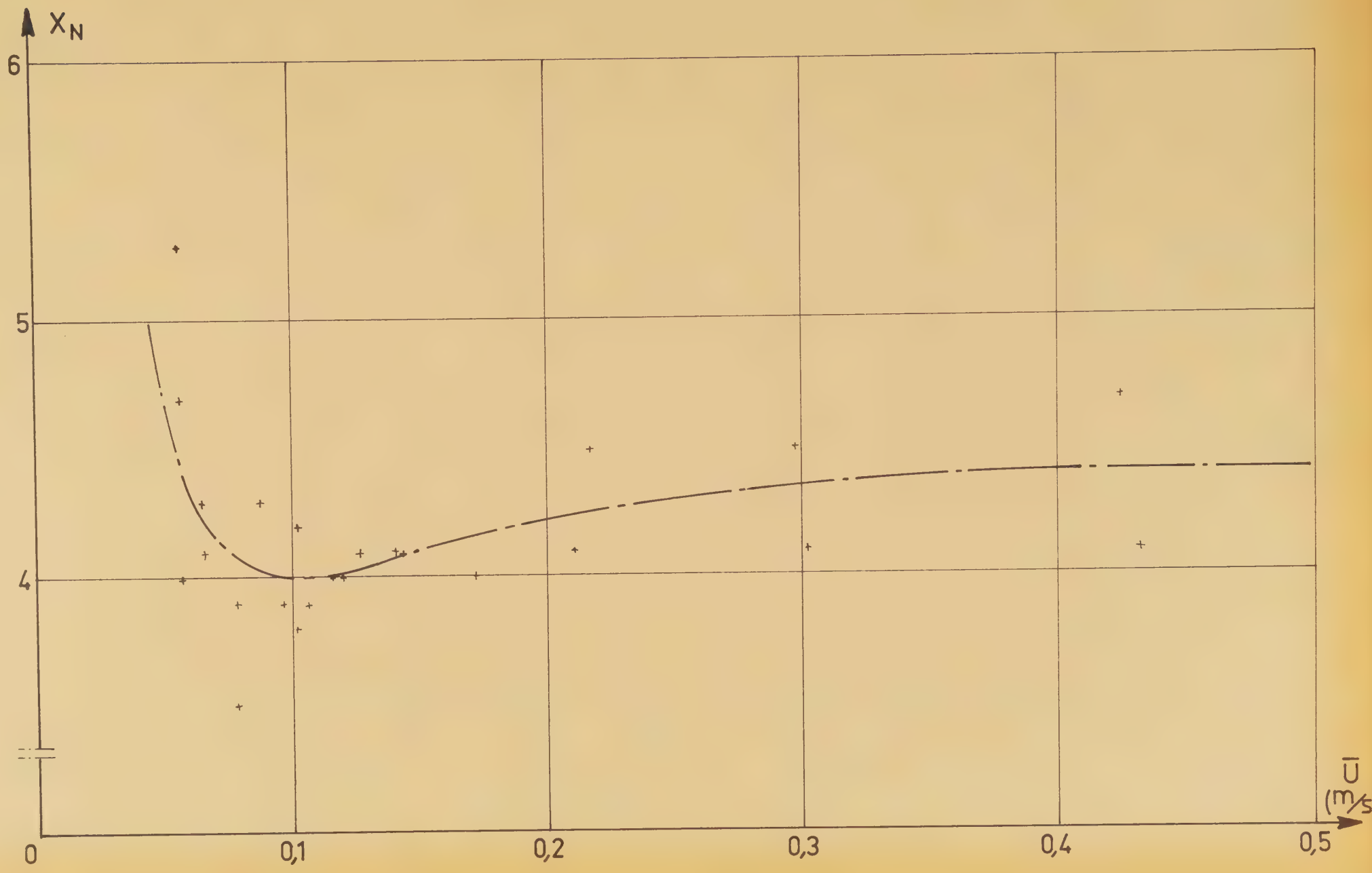


Fig.83

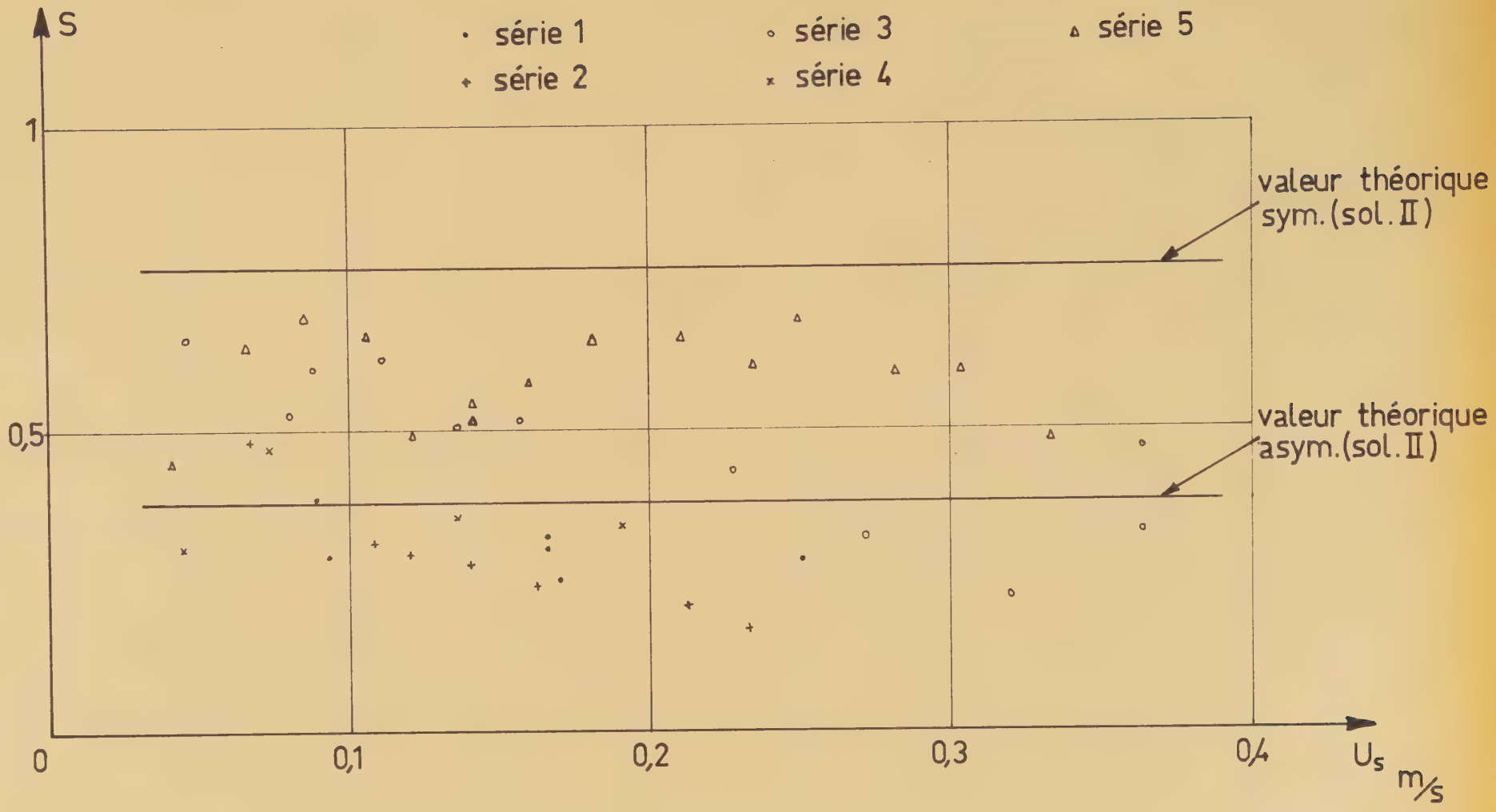

S
série 1
série 2
série 3
série 4
série 5
1
0,5
0
0,1
0,2
0,3
0,4
Us m/s
valeur théorique sym.(sol.II)
valeur théorique asym.(sol.II)

Fig.84

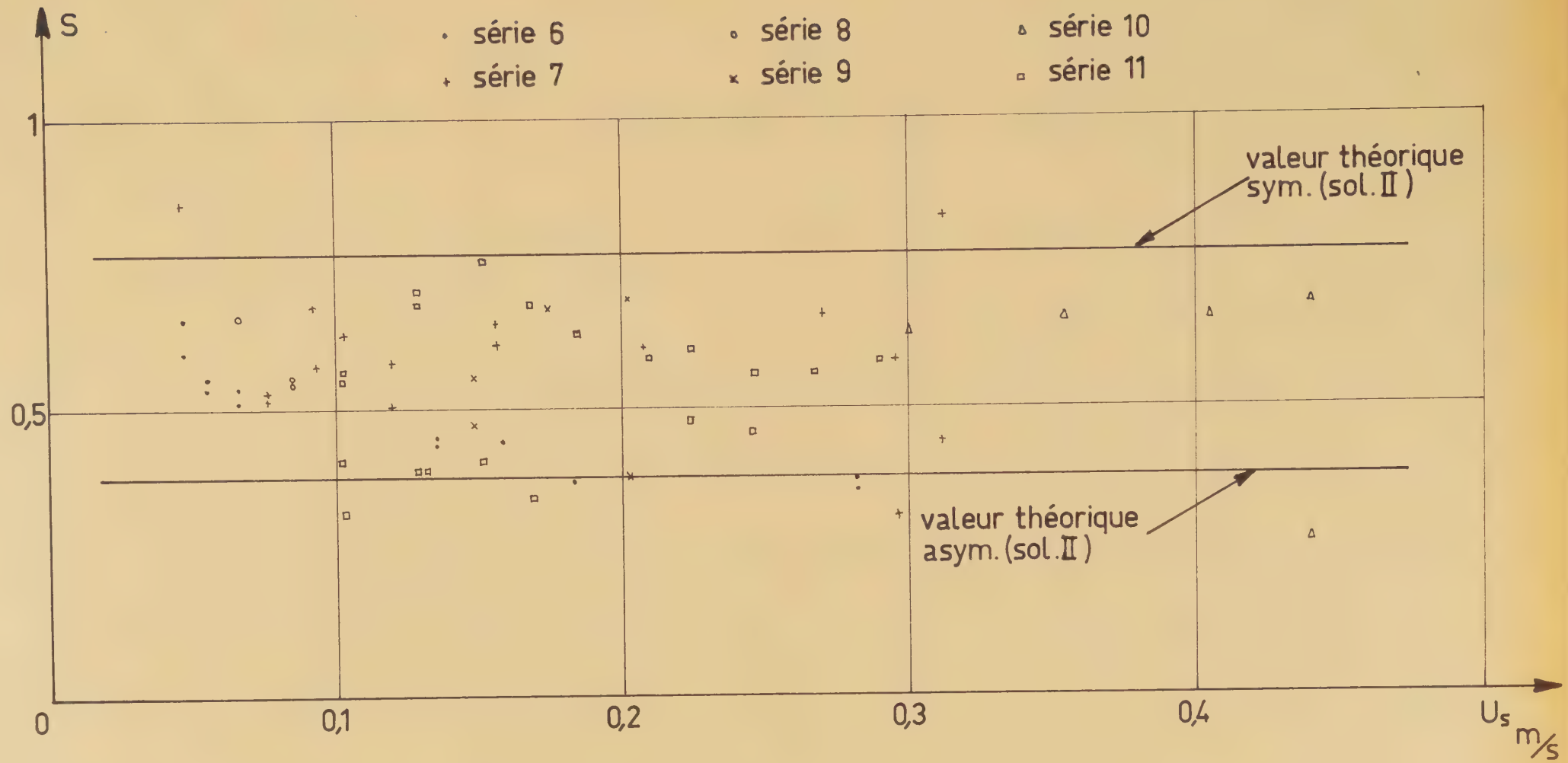

S
série 6
série 7
série 8
série 9
série 10
série 11
1
0,5
0
0,1
0,2
0,3
0,4
Us m/s
valeur théorique sym. (sol. II)
valeur théorique asym. (sol. II)

Fig. 85

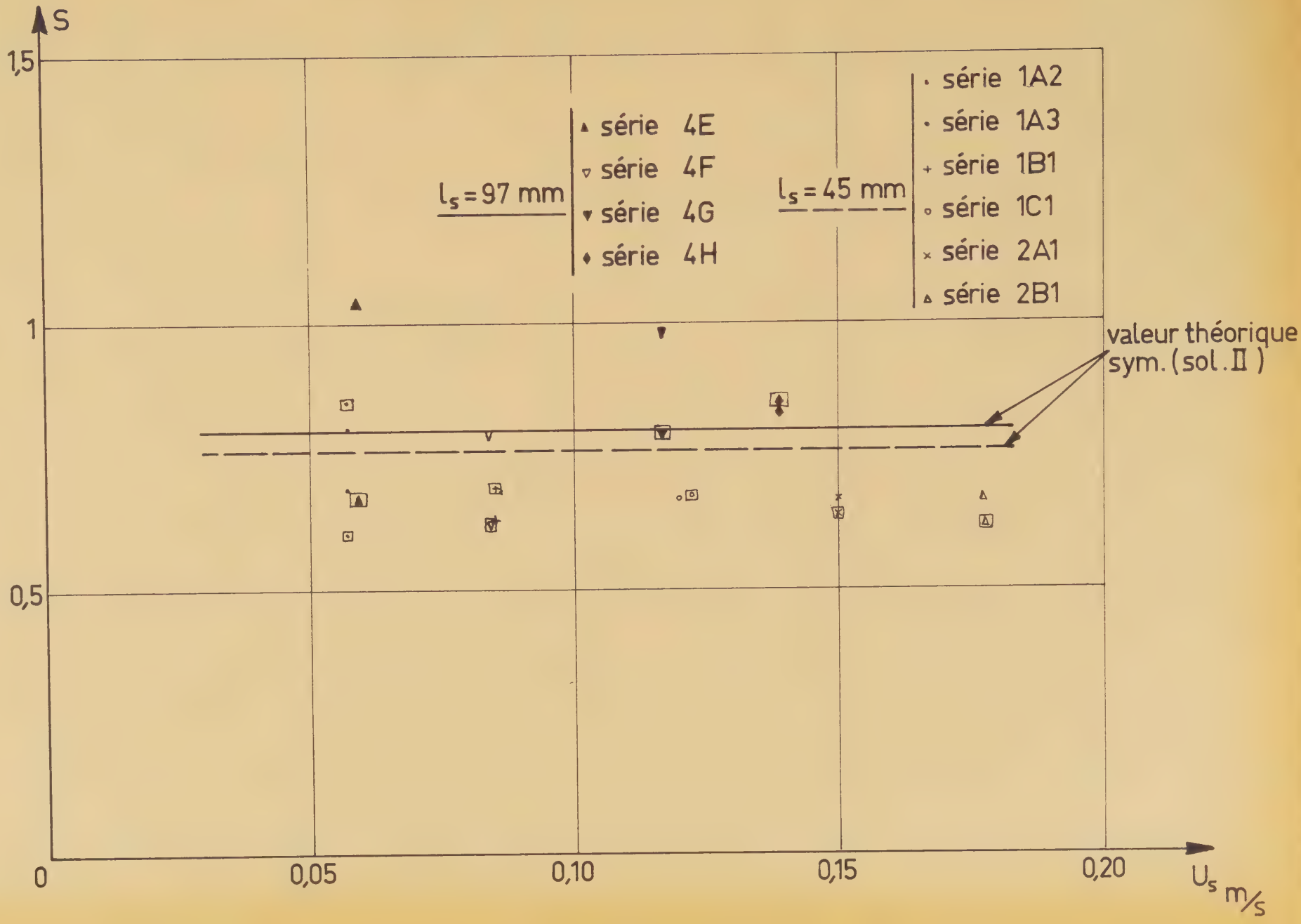

S
1,5
1
0,5
0
0,05
0,10
0,15
0,20
U_s m/s
l_s = 97 mm
série 4E
série 4F
série 4G
série 4H
l_s = 45 mm
série 1A2
série 1A3
série 1B1
série 1C1
série 2A1
série 2B1
valeur théorique
sym. (sol. II)

Fig. 86

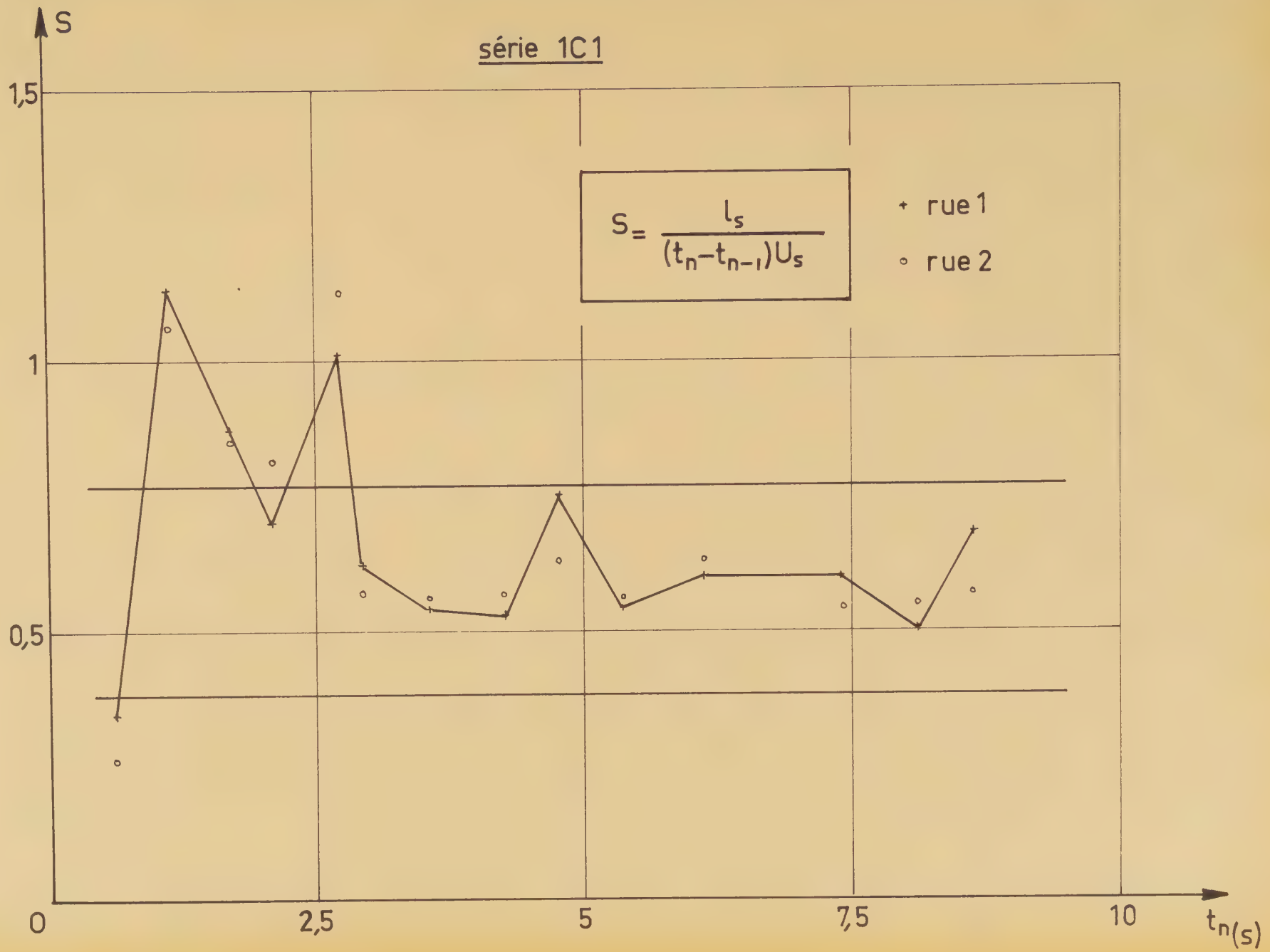


Fig.87

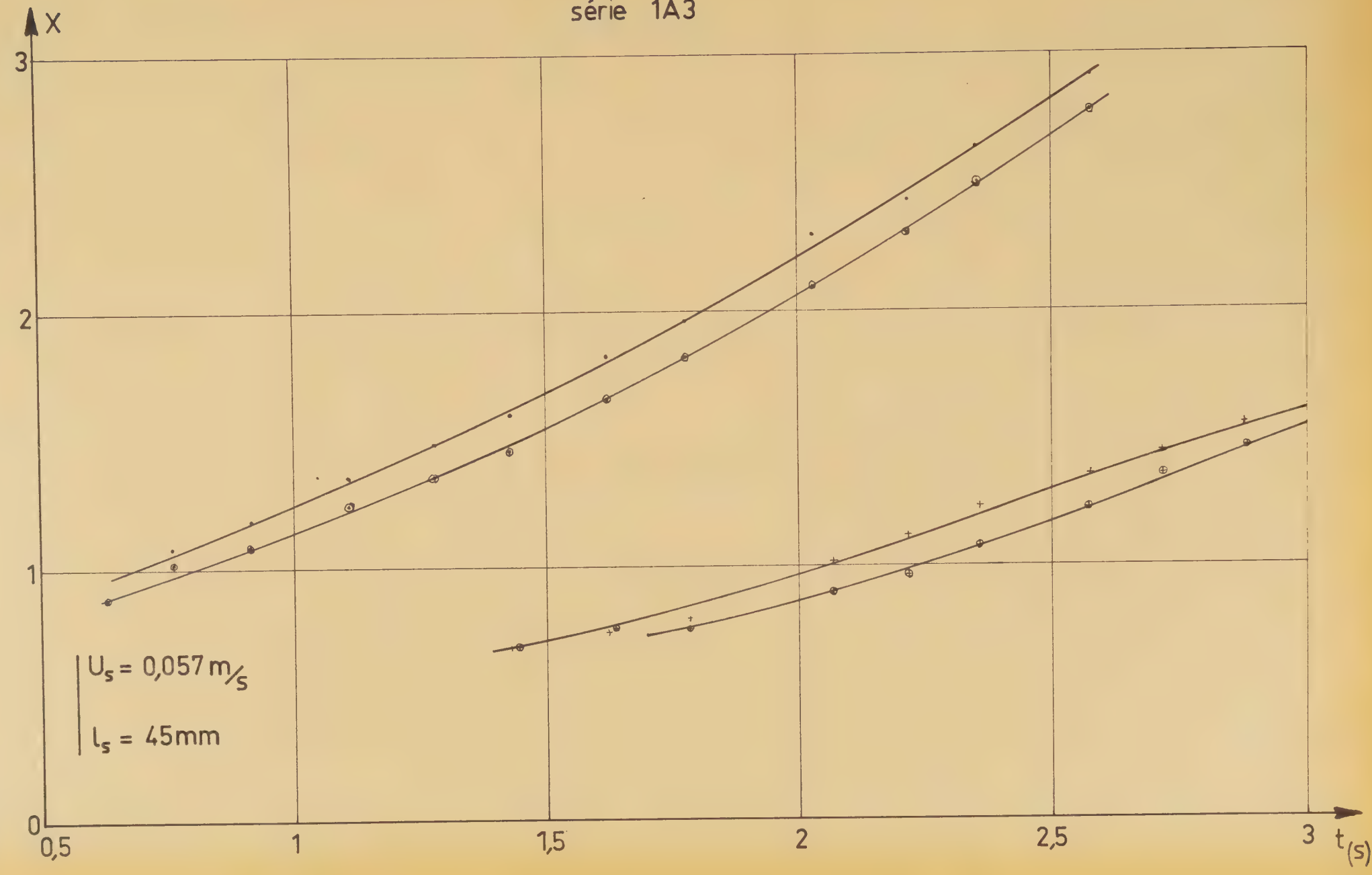


Fig. 88a

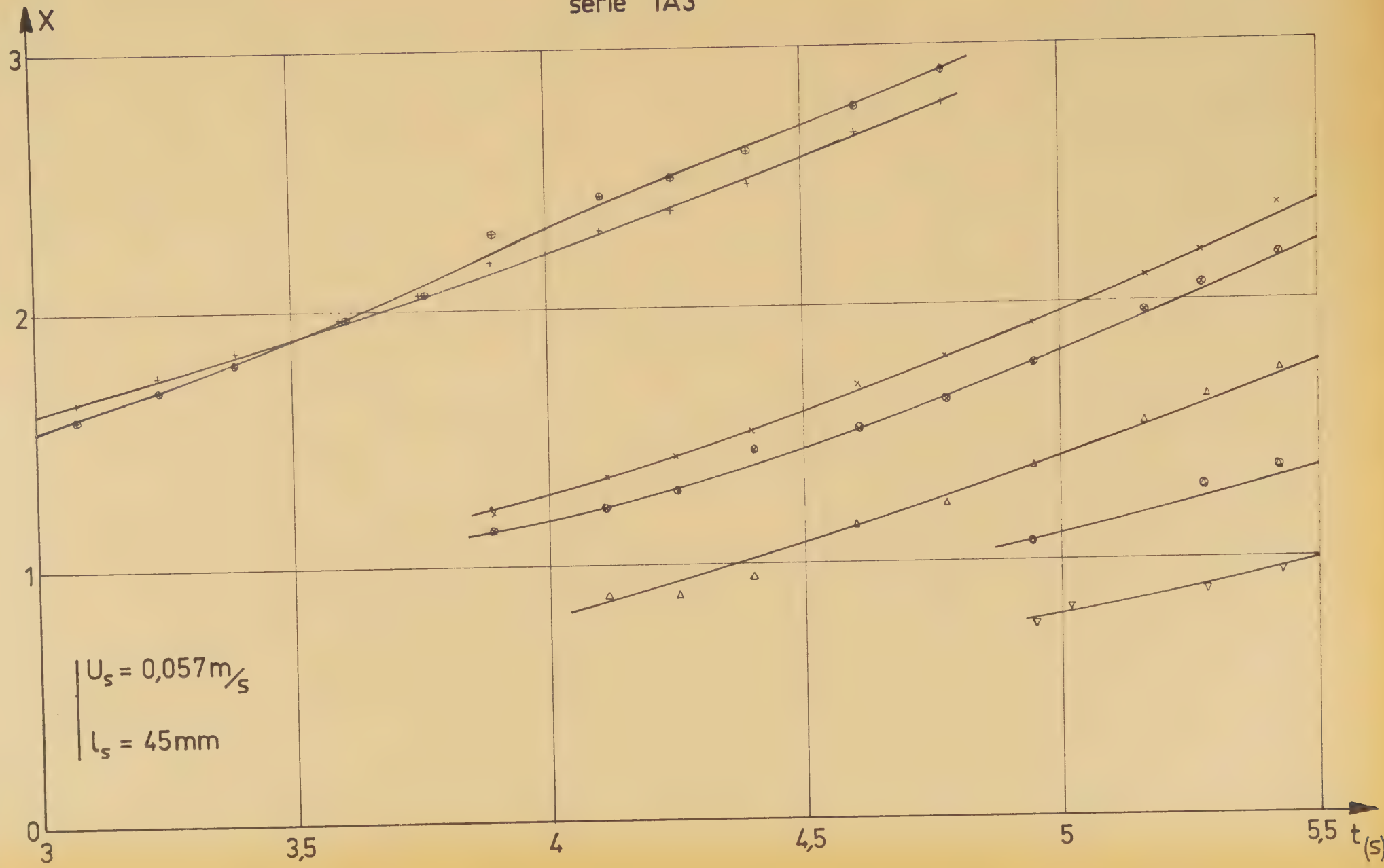


Fig. 88b

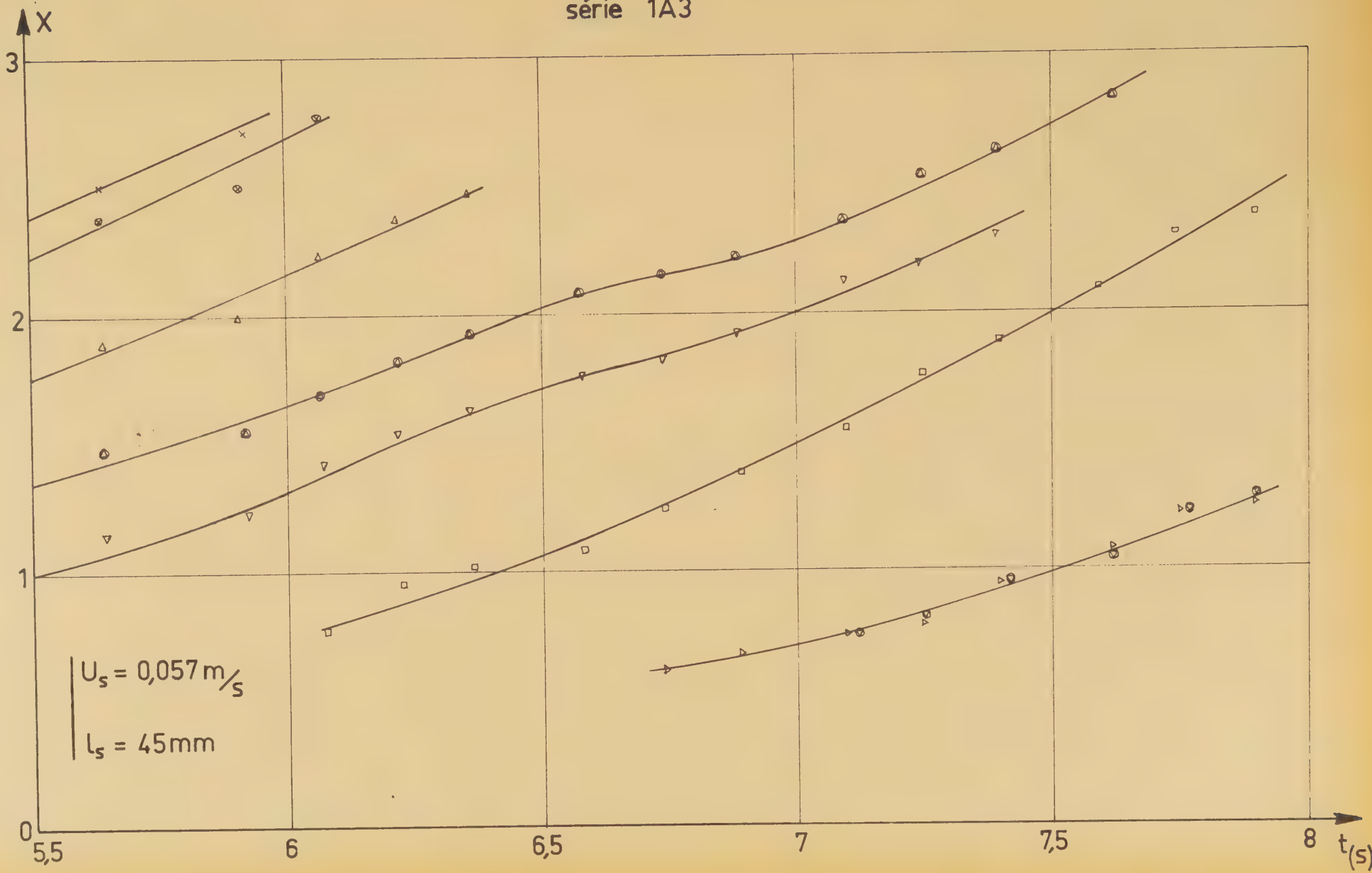


Fig. 88c

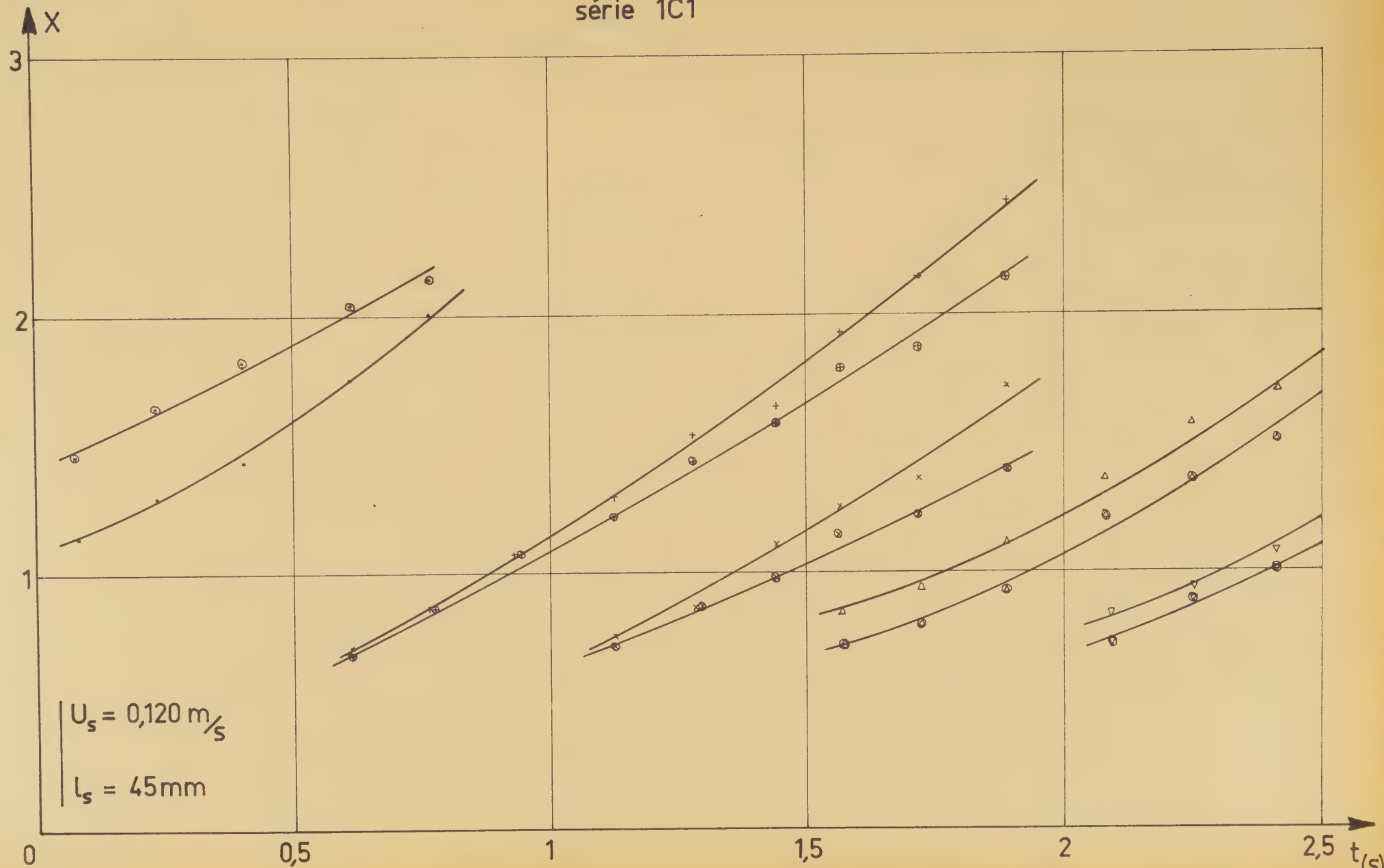


Fig. 89a

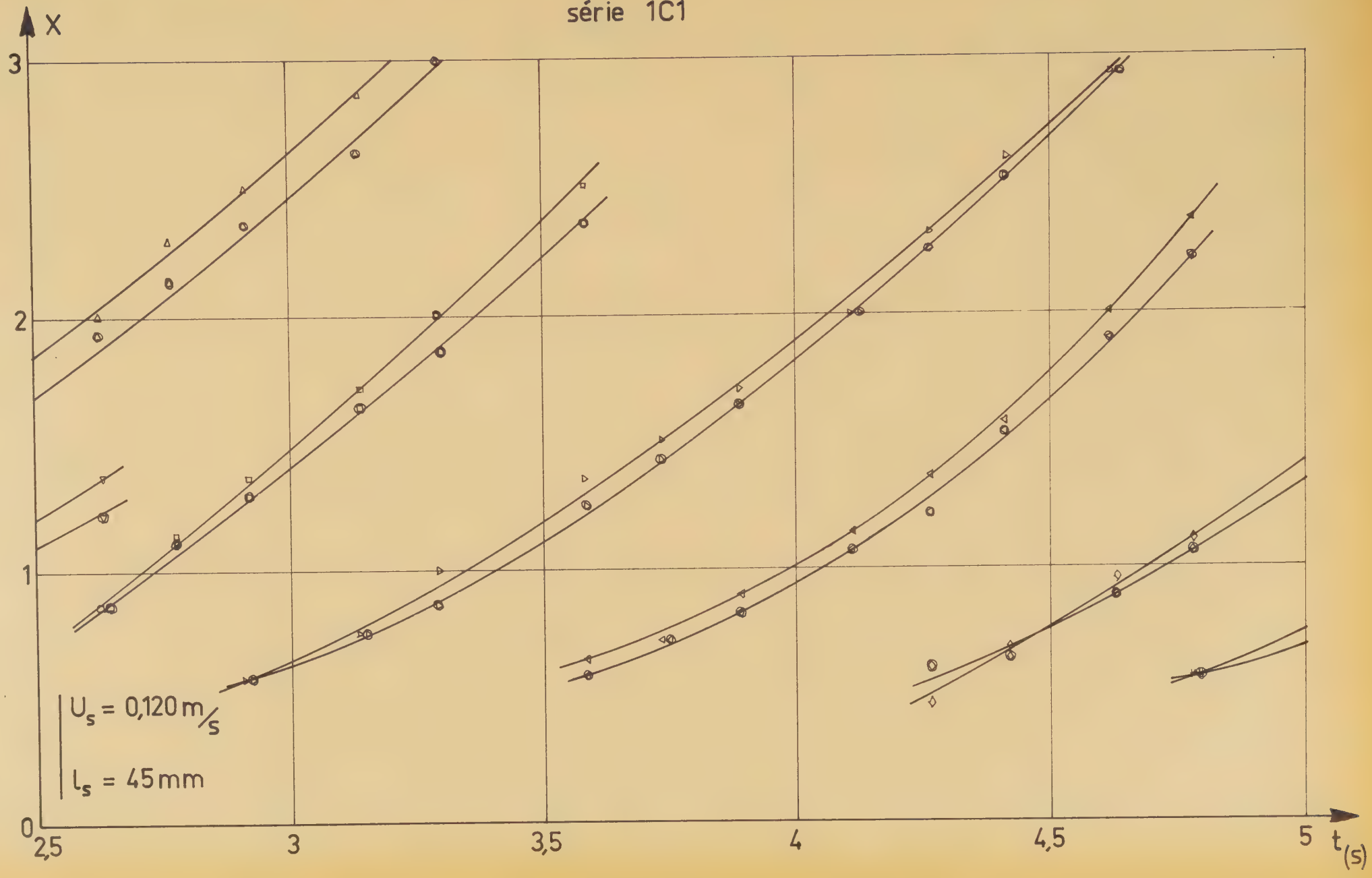


Fig. 89b

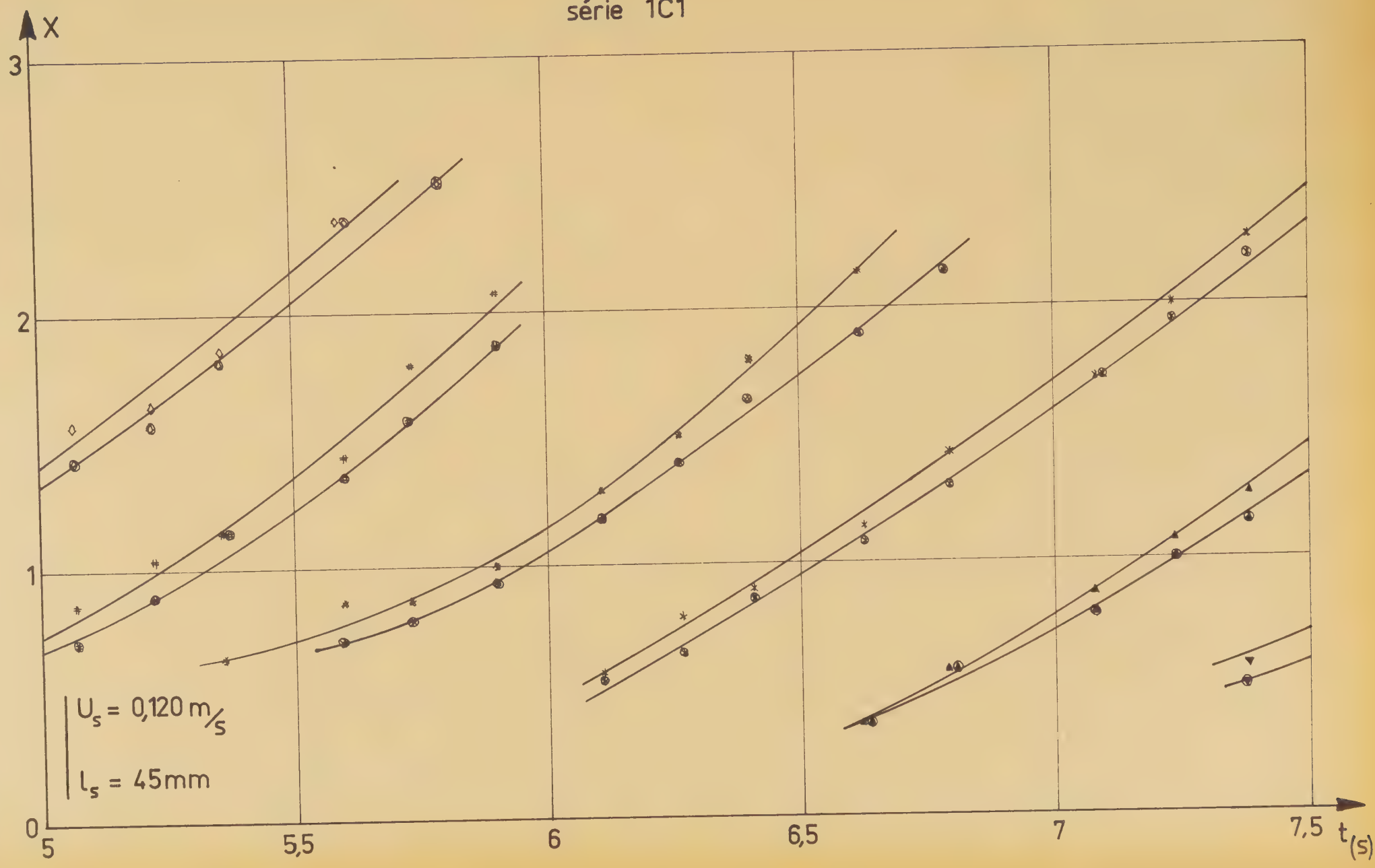


Fig. 89c

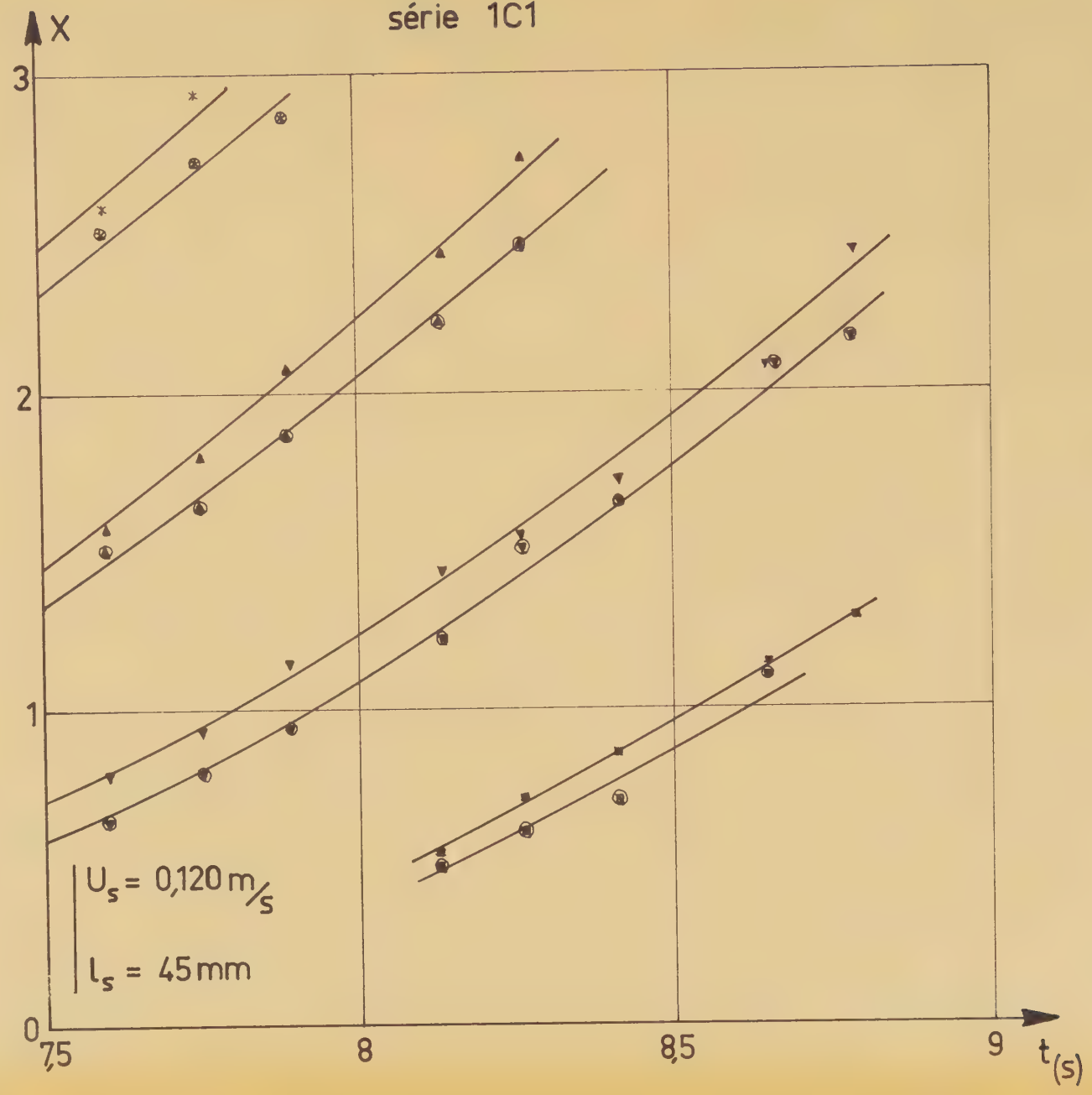


Fig. 89d

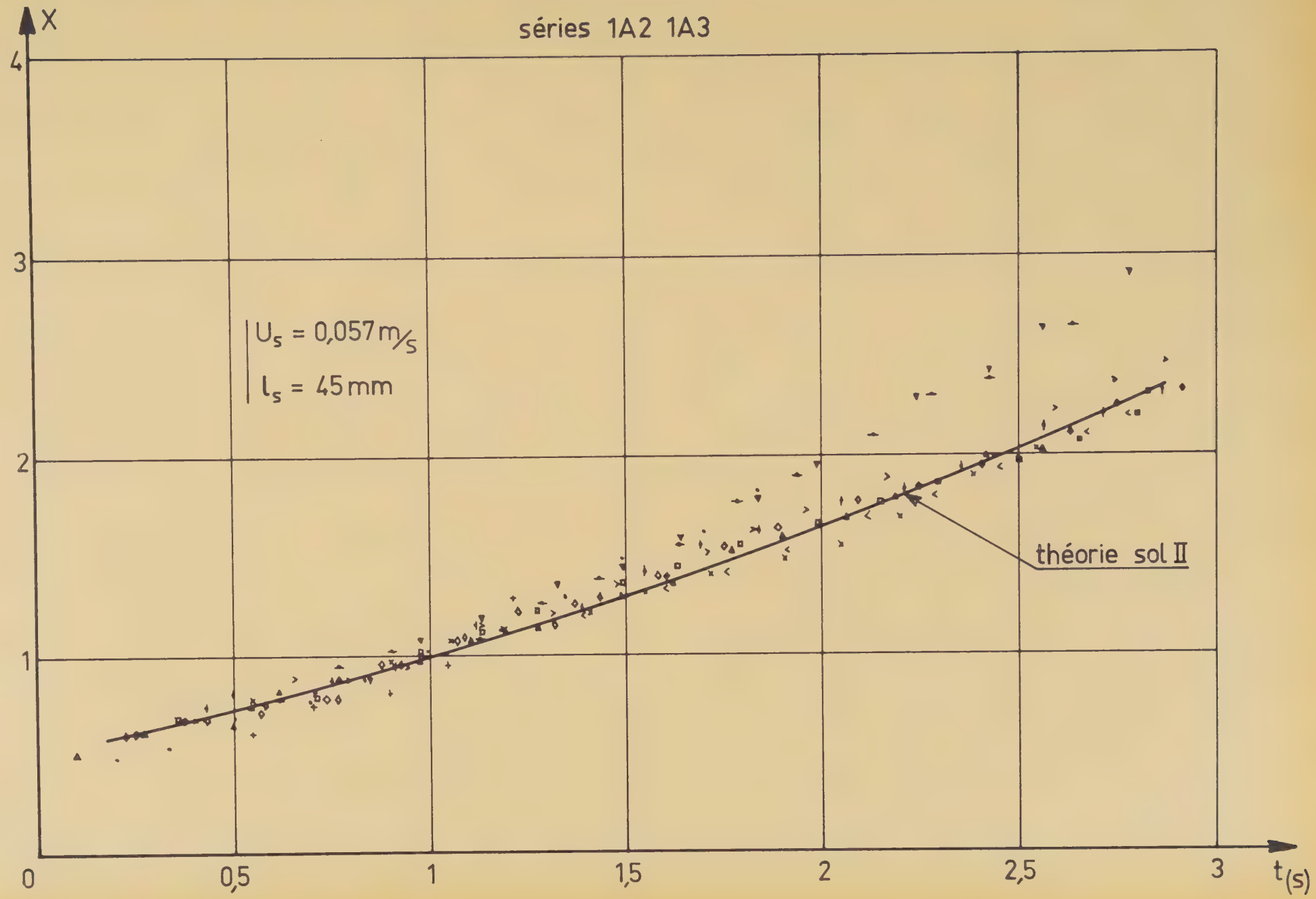

séries 1A2 1A3
X
4
3
2
1
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
t(s)
U_s = 0,057 m/s
l_s = 45 mm
théorie sol II

Fig.90a

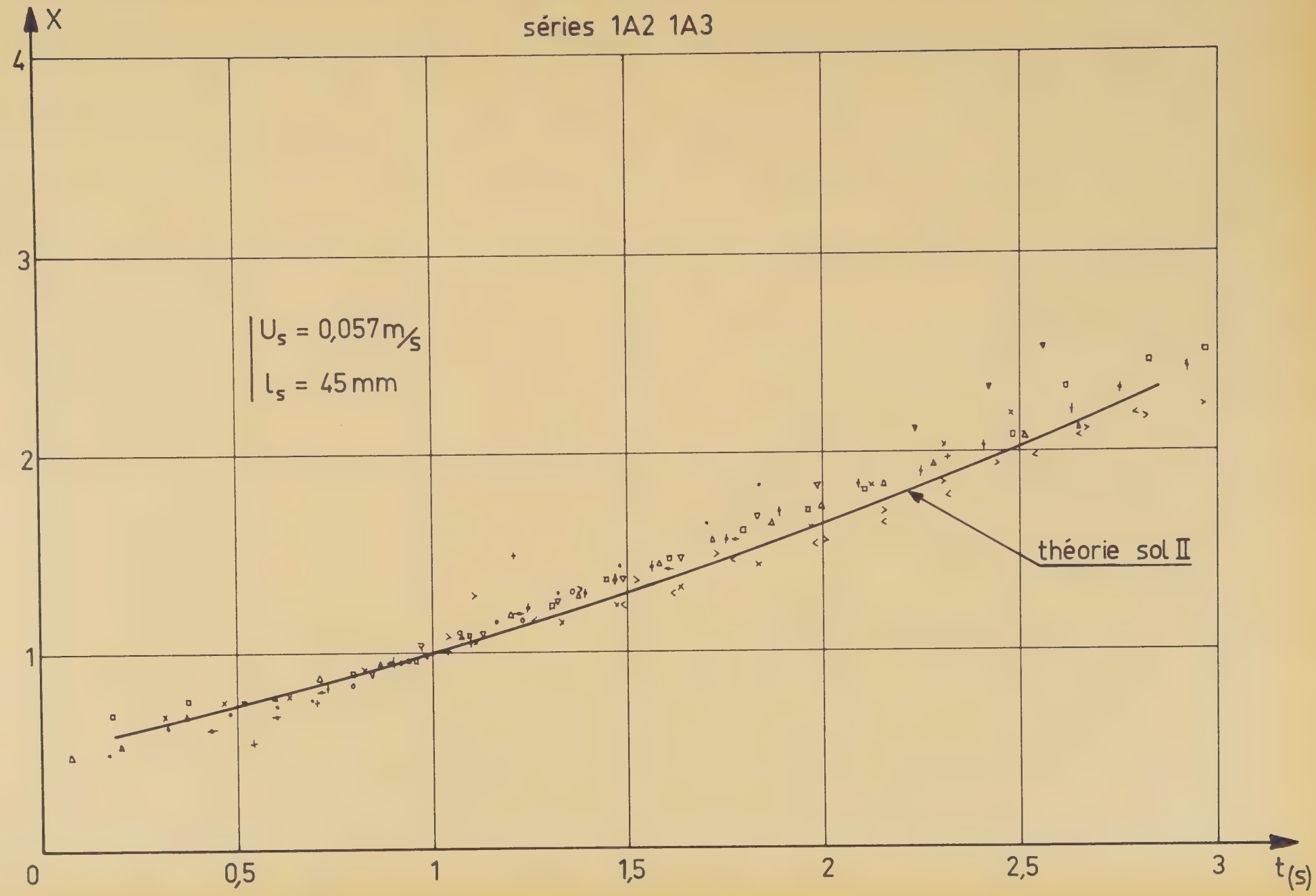

séries 1A2 1A3
X
4
3
2
1
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
t(s)
U_s = 0,057 m/s
l_s = 45 mm
théorie sol II

Fig.30b

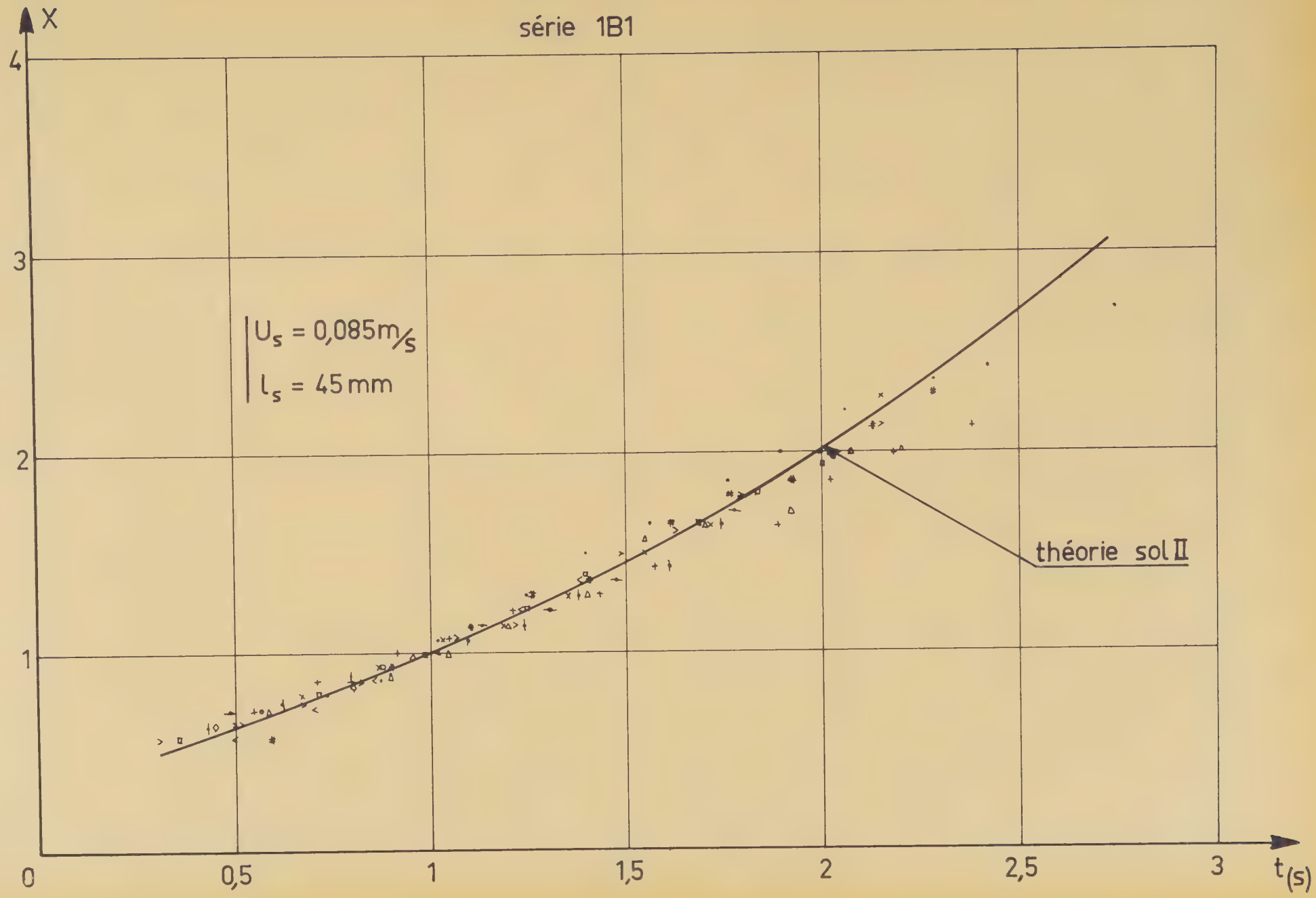

série 1B1
X
4
3
2
1
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
t(s)
U_s = 0,085m/s
l_s = 45mm
théorie sol II

Fig.91a

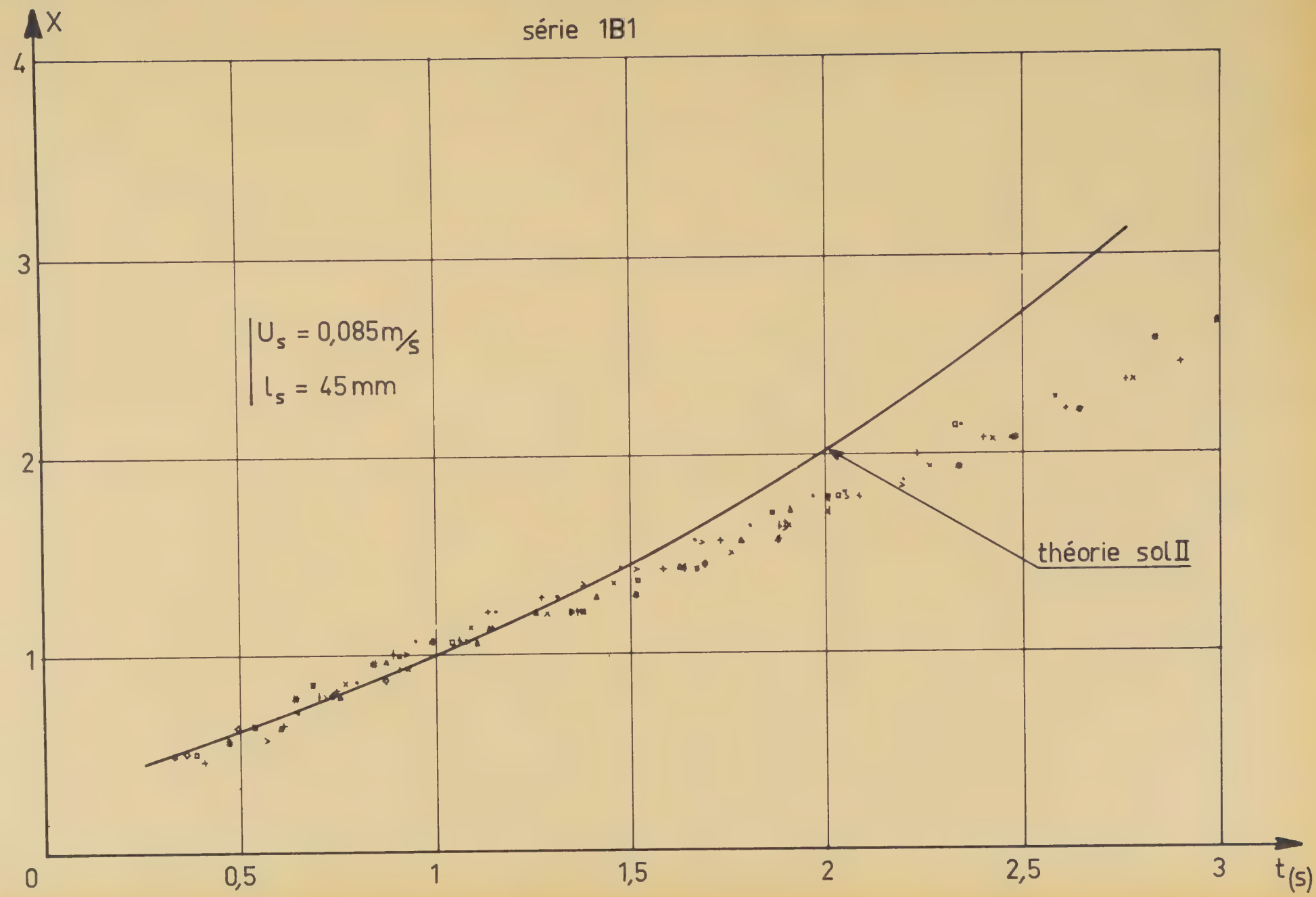

série 1B1
X
4
3
2
1
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
t(s)
U_s = 0,085 m/s
l_s = 45 mm
théorie sol II

Fig.91b

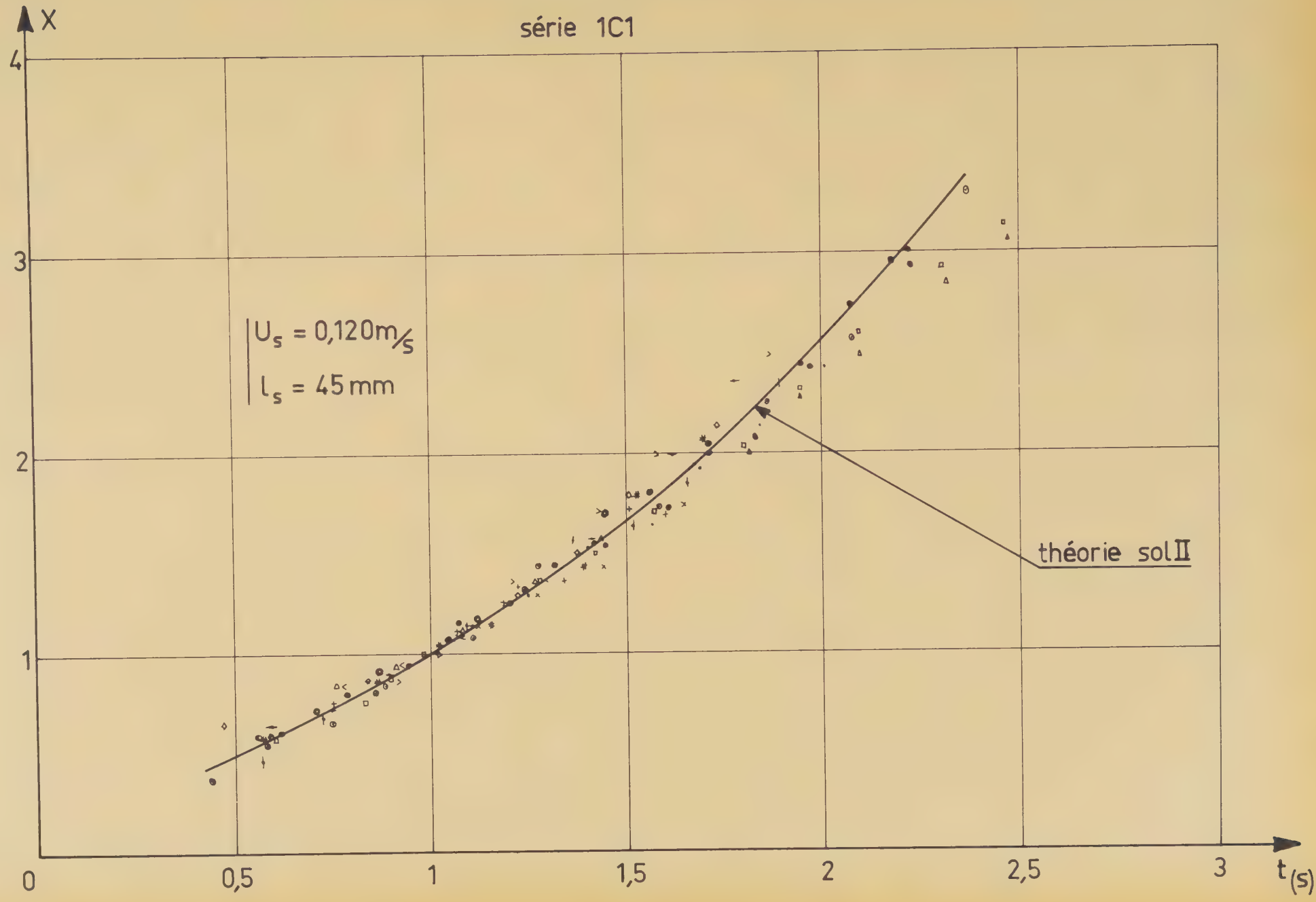

série 1C1
X
4
3
2
1
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
t (s)
U_s = 0,120 m/s
l_s = 45 mm
théorie sol II

Fig.92a

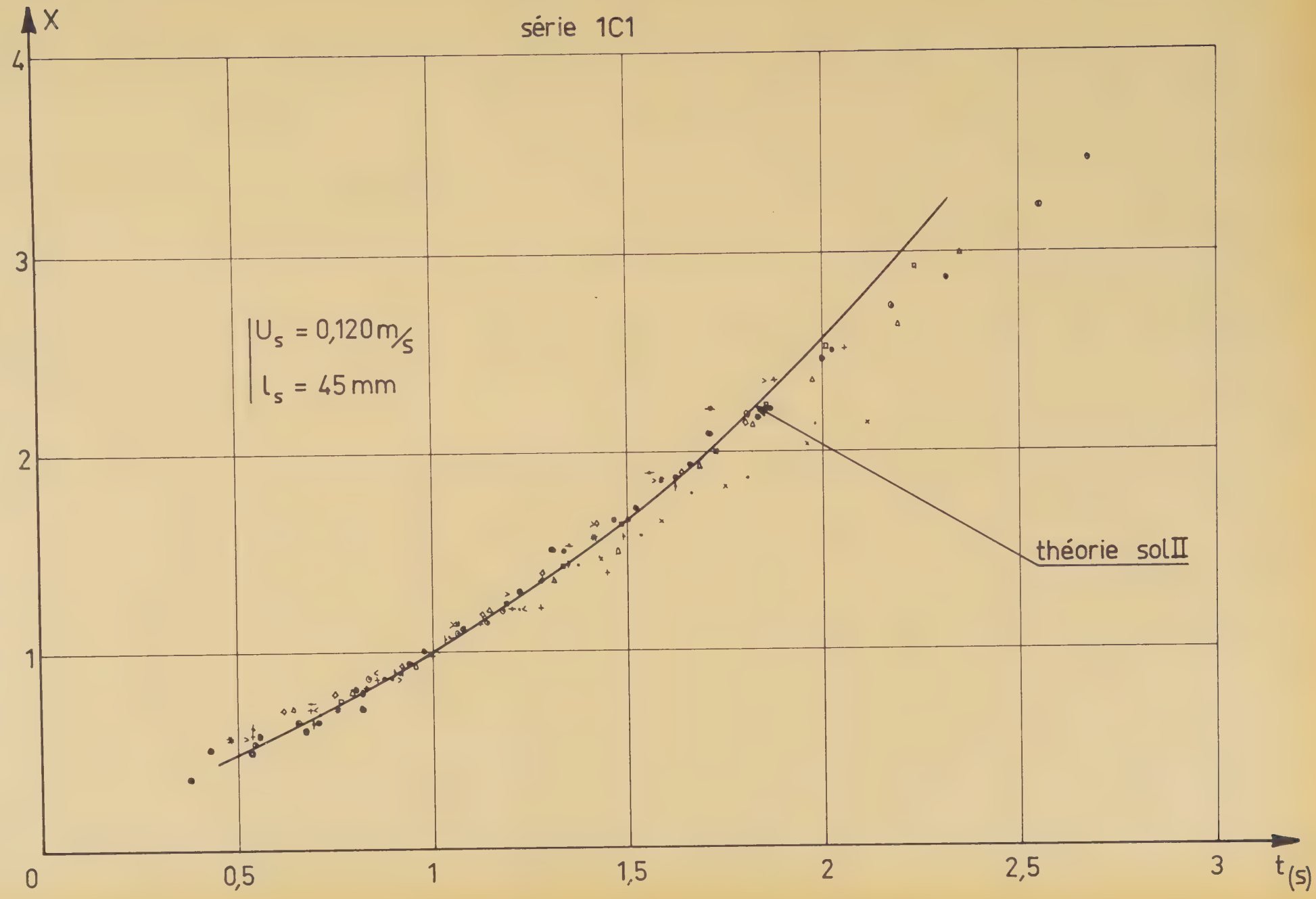

série 1C1
X
4
3
2
1
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
t(s)
U_s = 0,120 m/s
l_s = 45 mm
théorie solII

Fig.92b

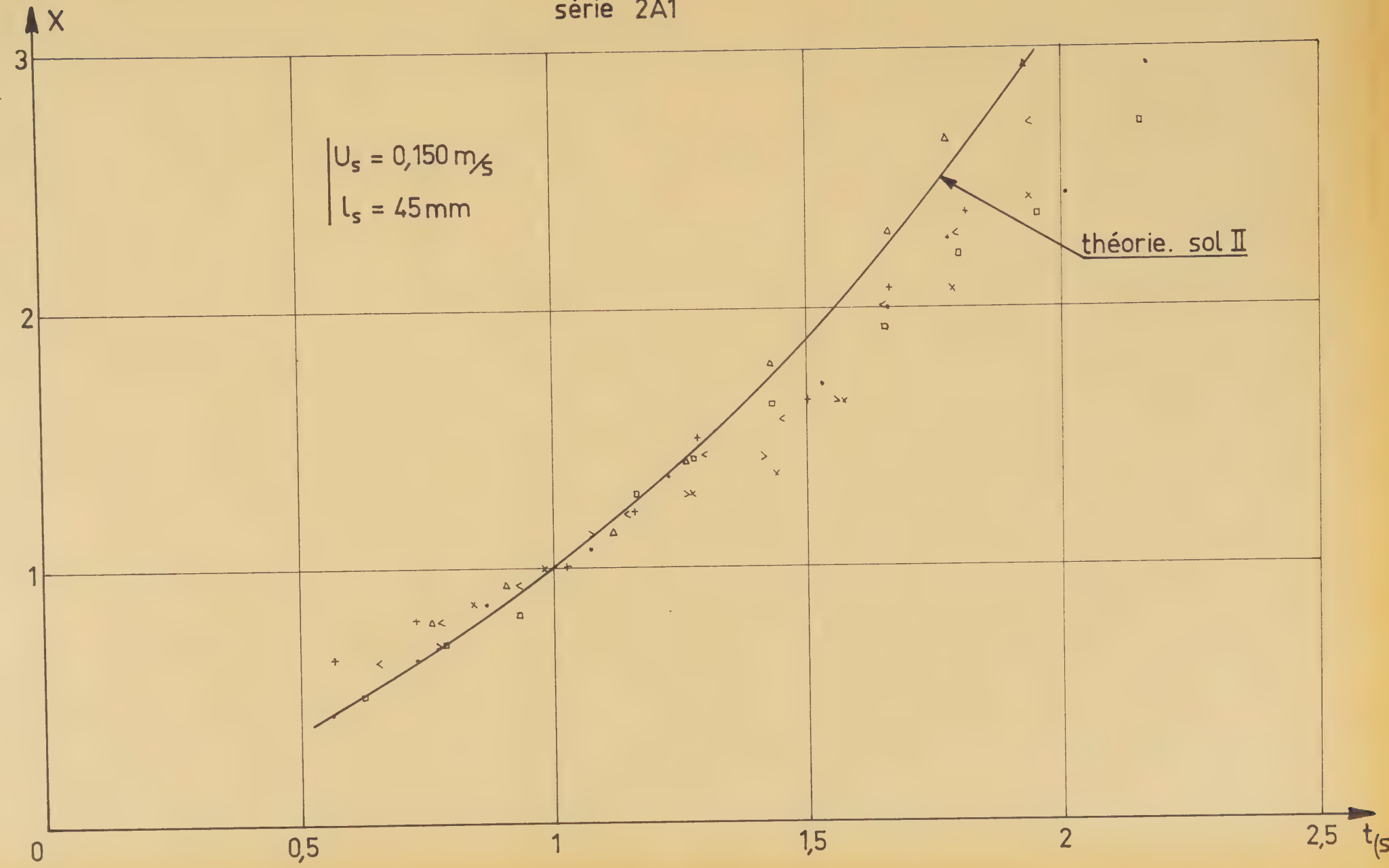


Fig.93a

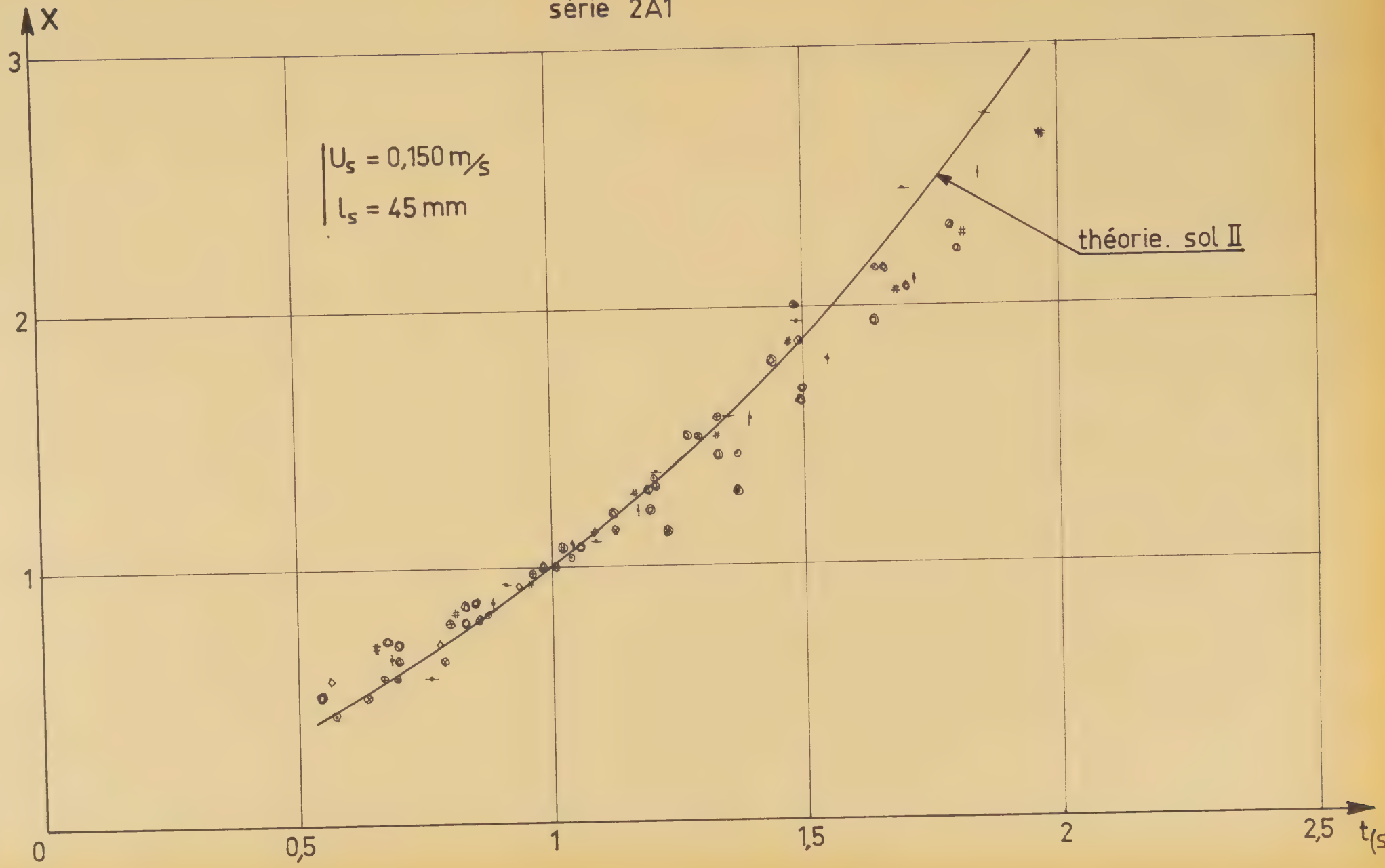


Fig.93b

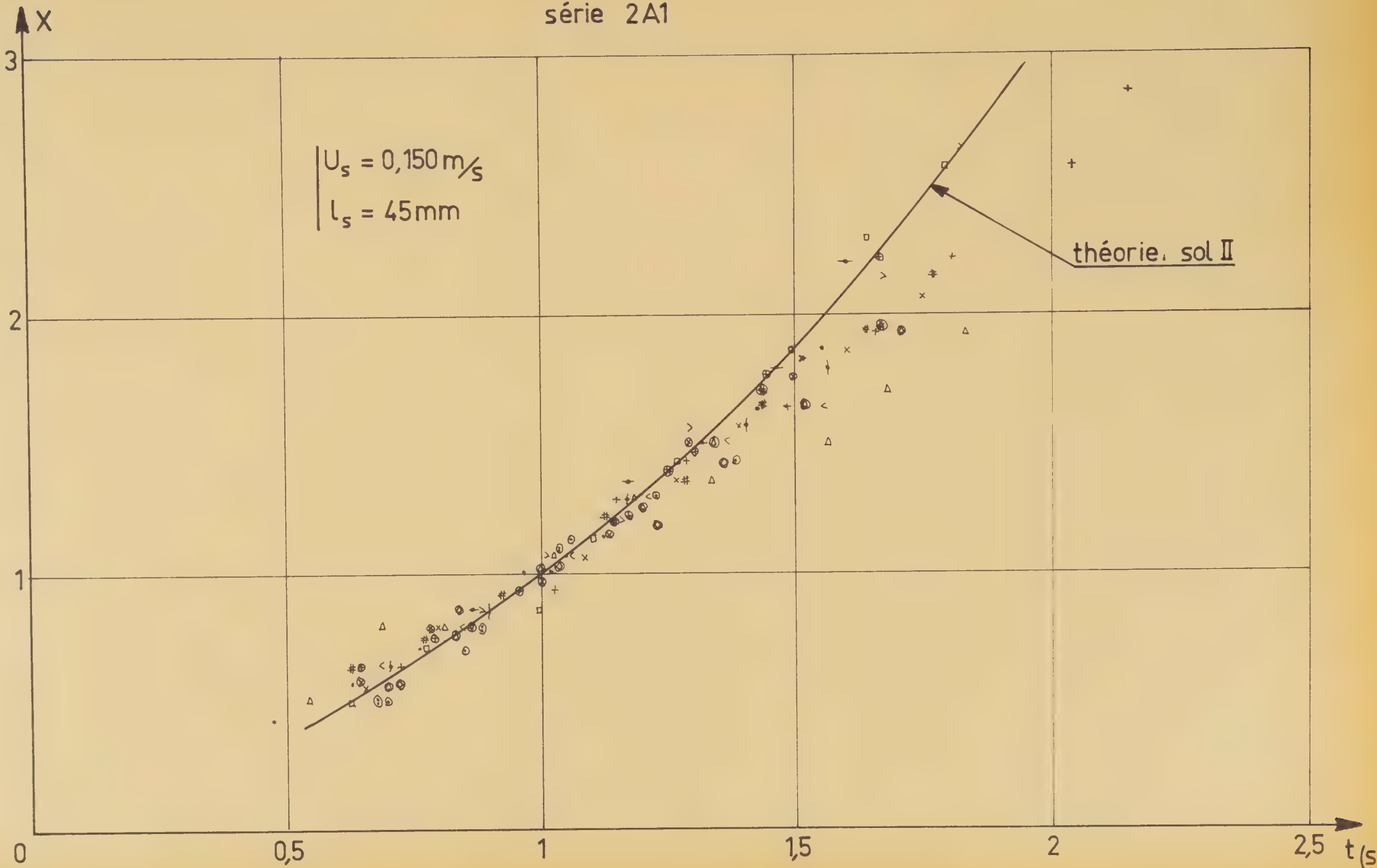


Fig.93c

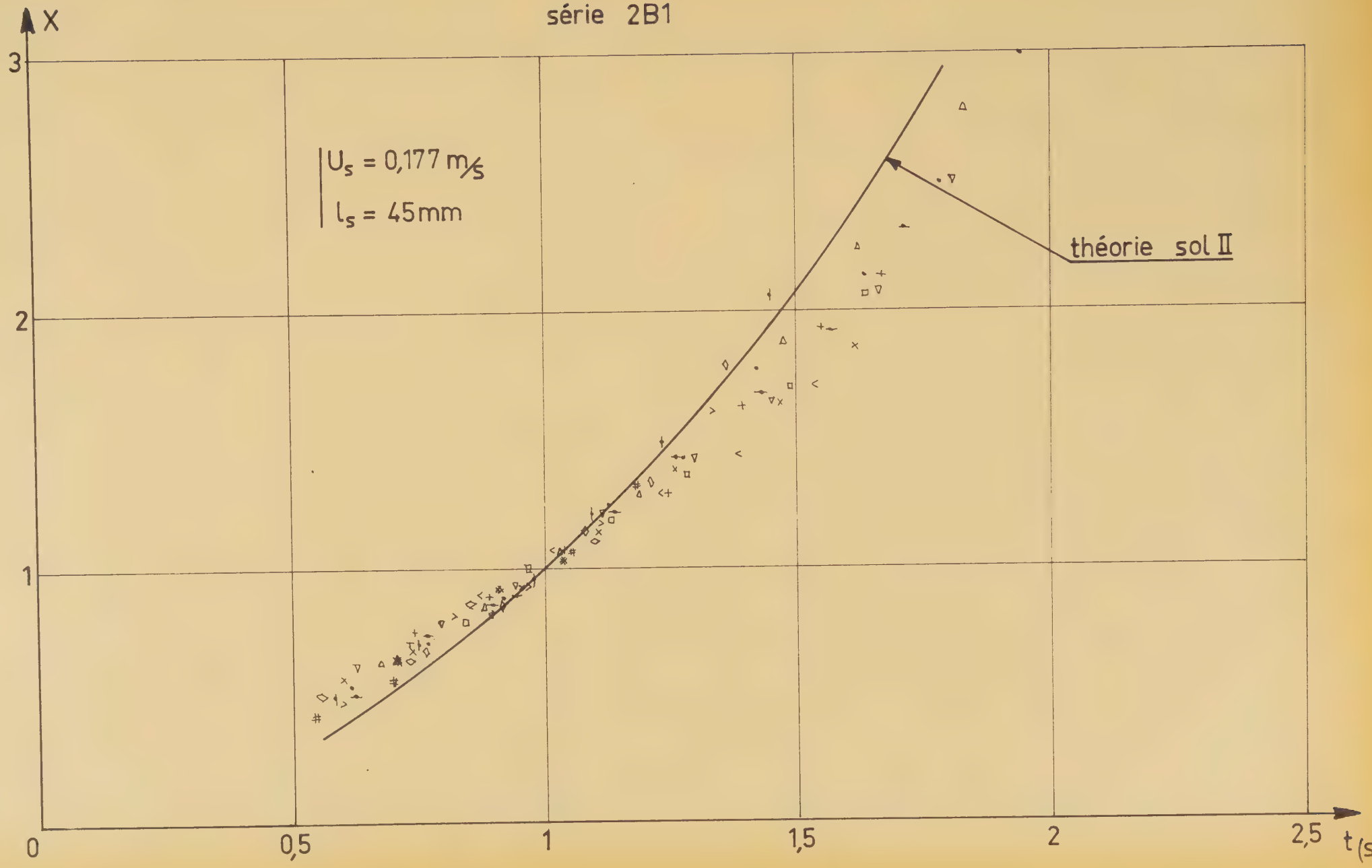


Fig. 94 a

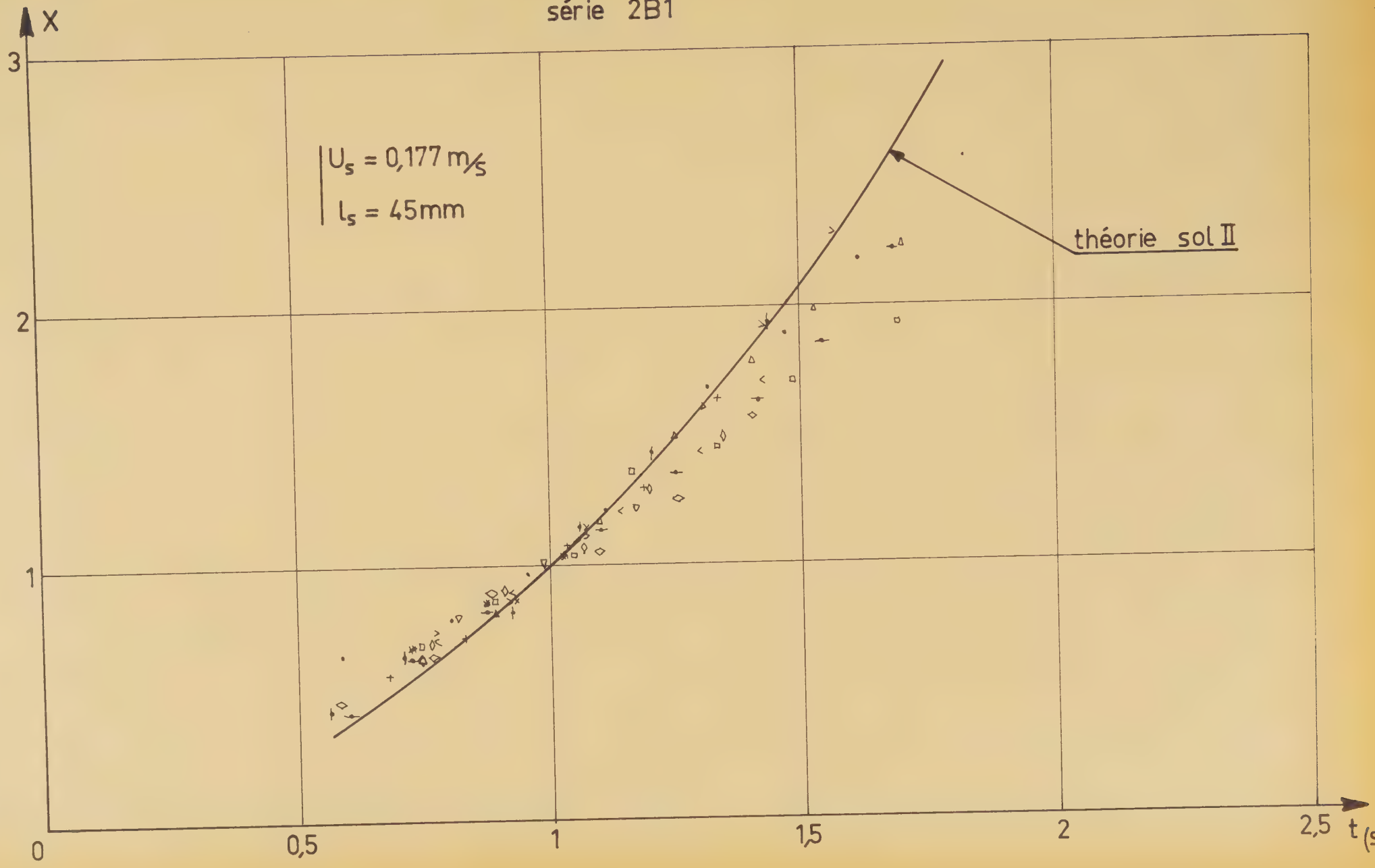


Fig.94b

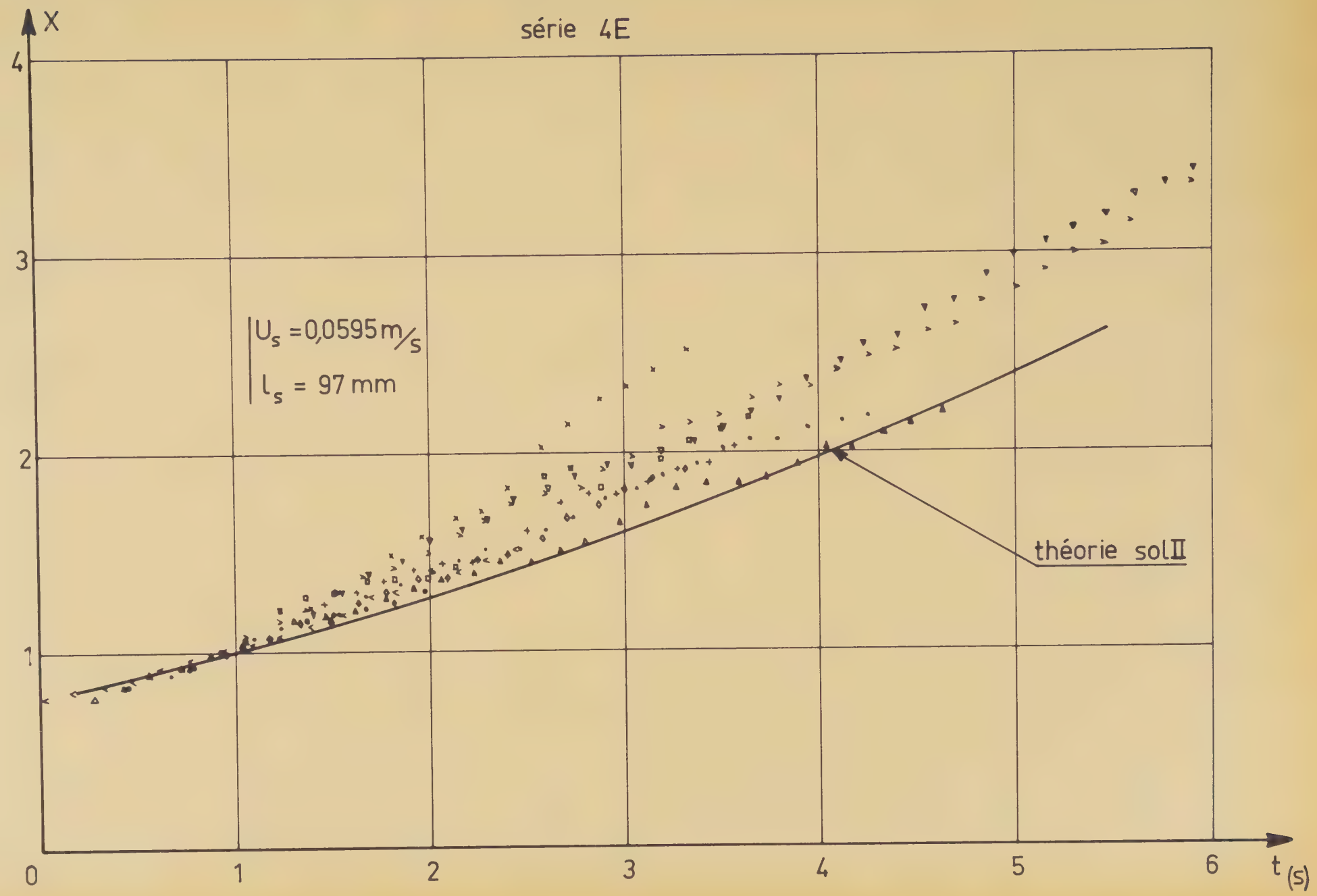


Fig.95a

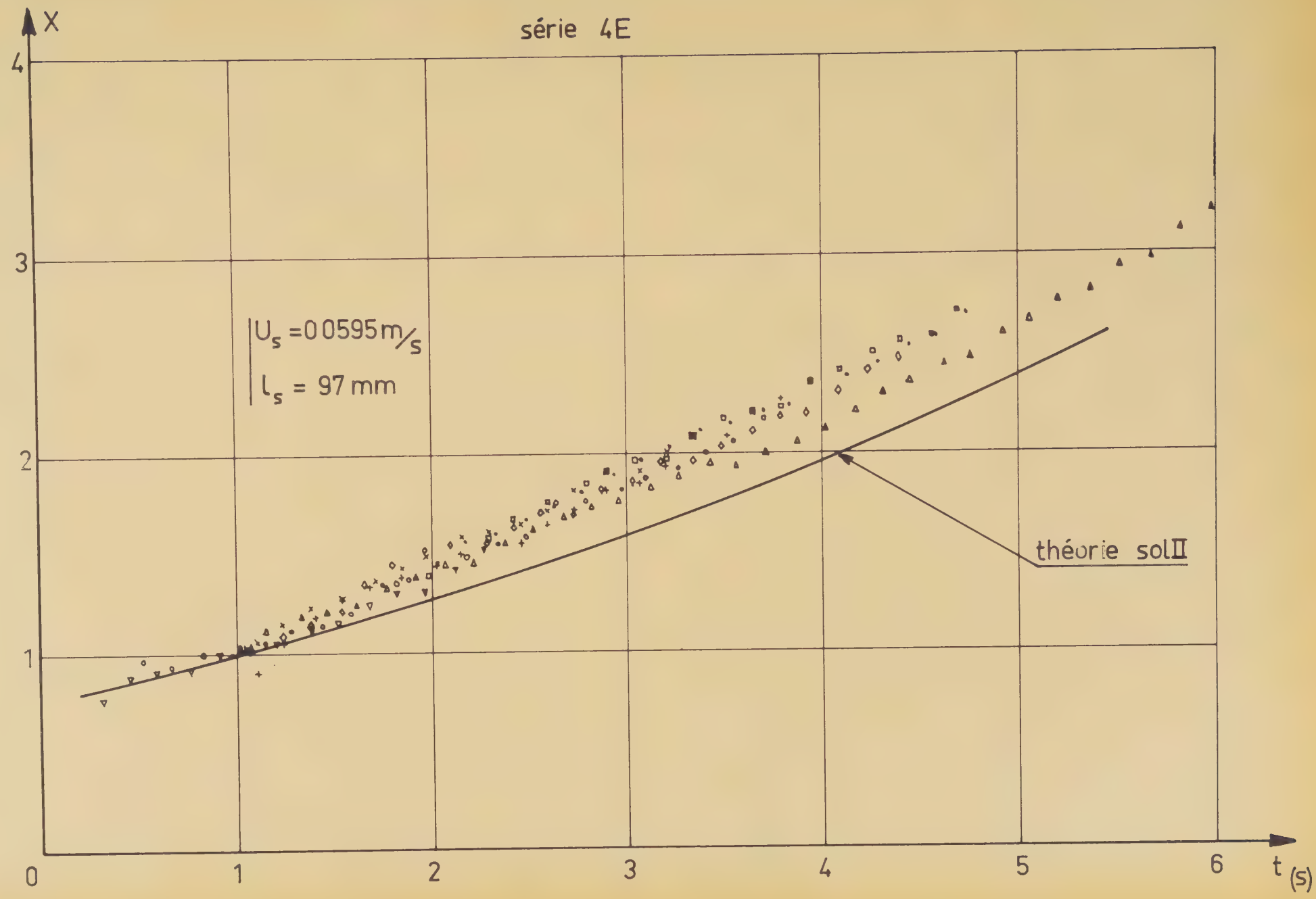


Fig.95b

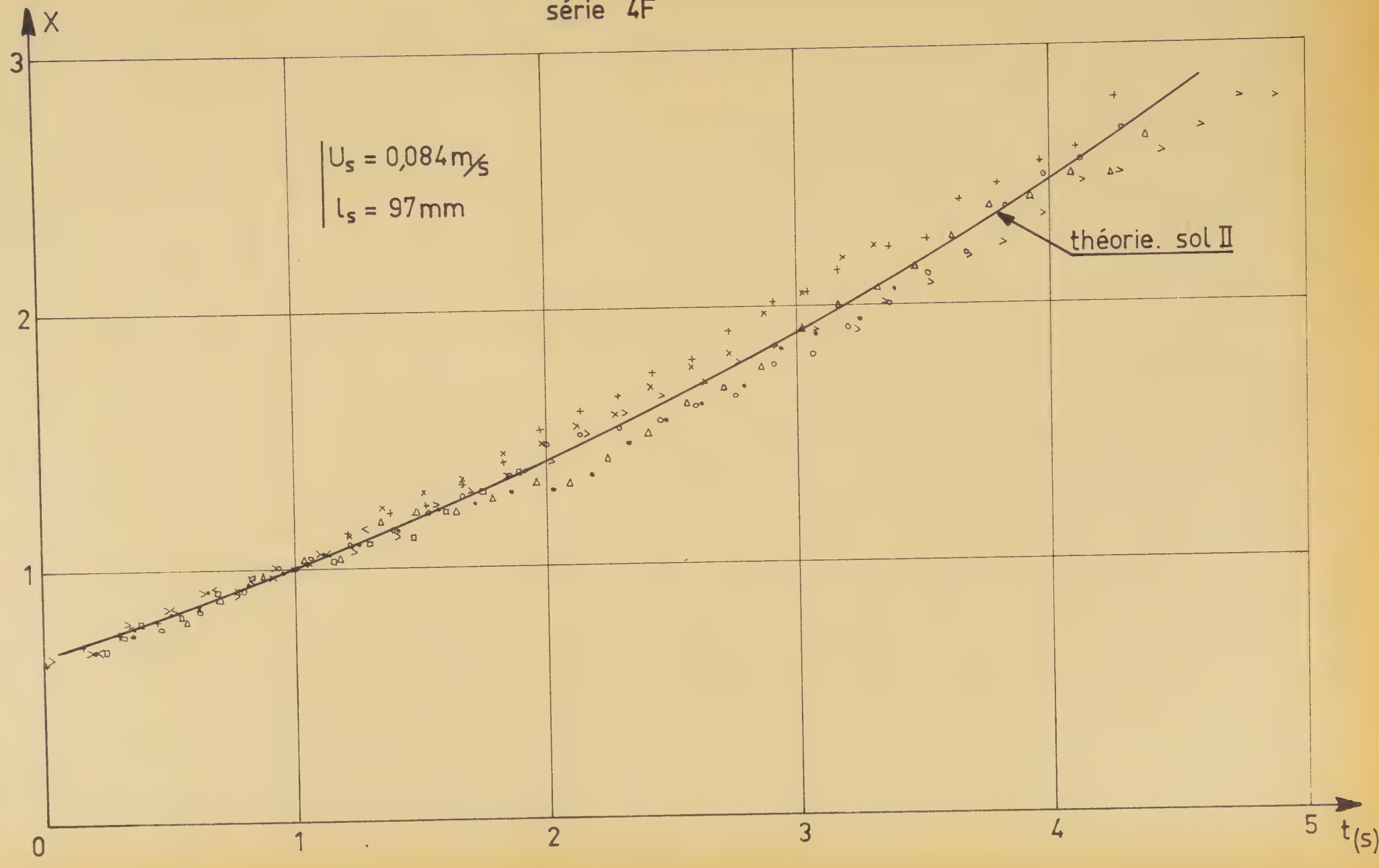


Fig.96a

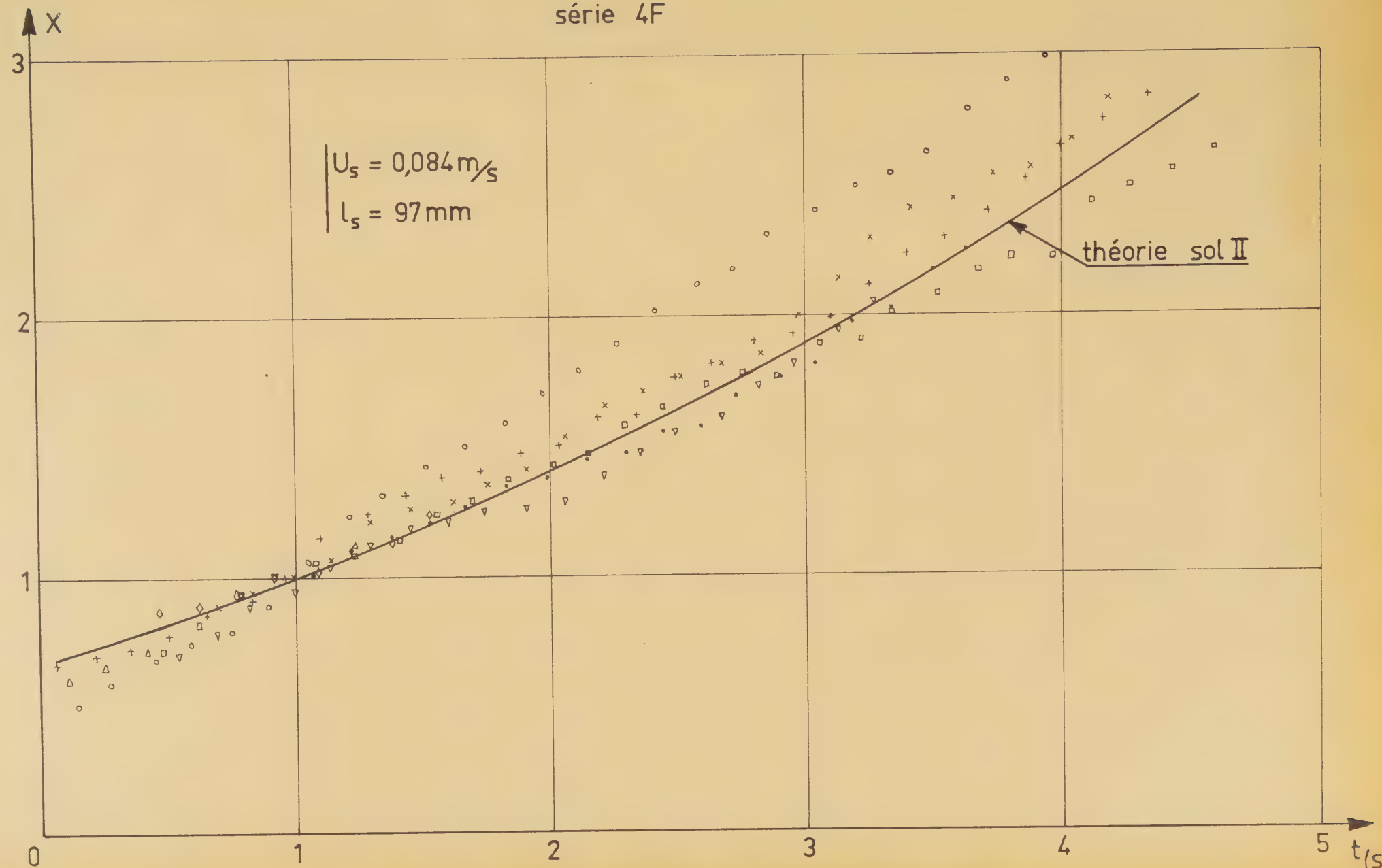


Fig. 96b

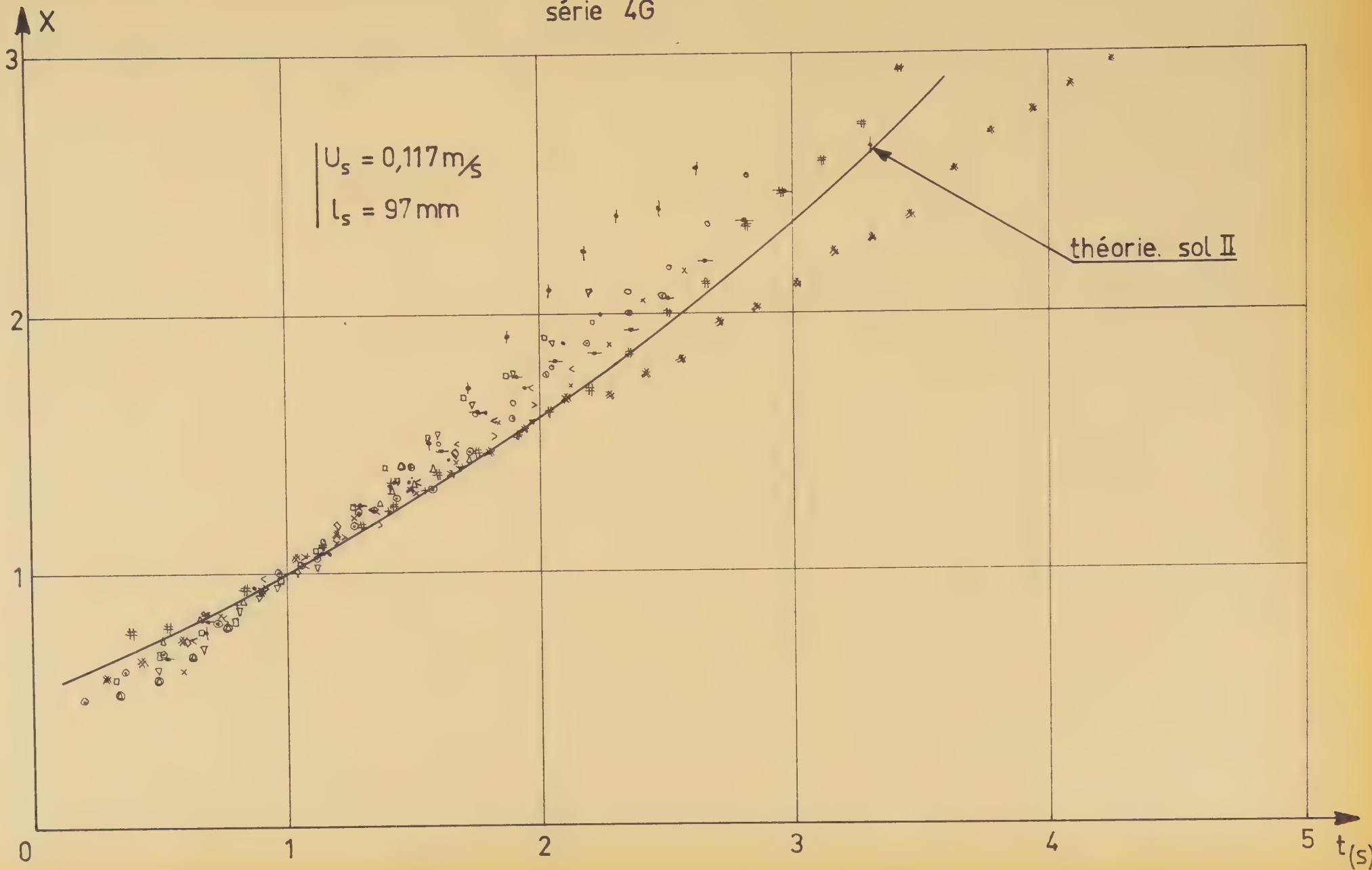


Fig.97a

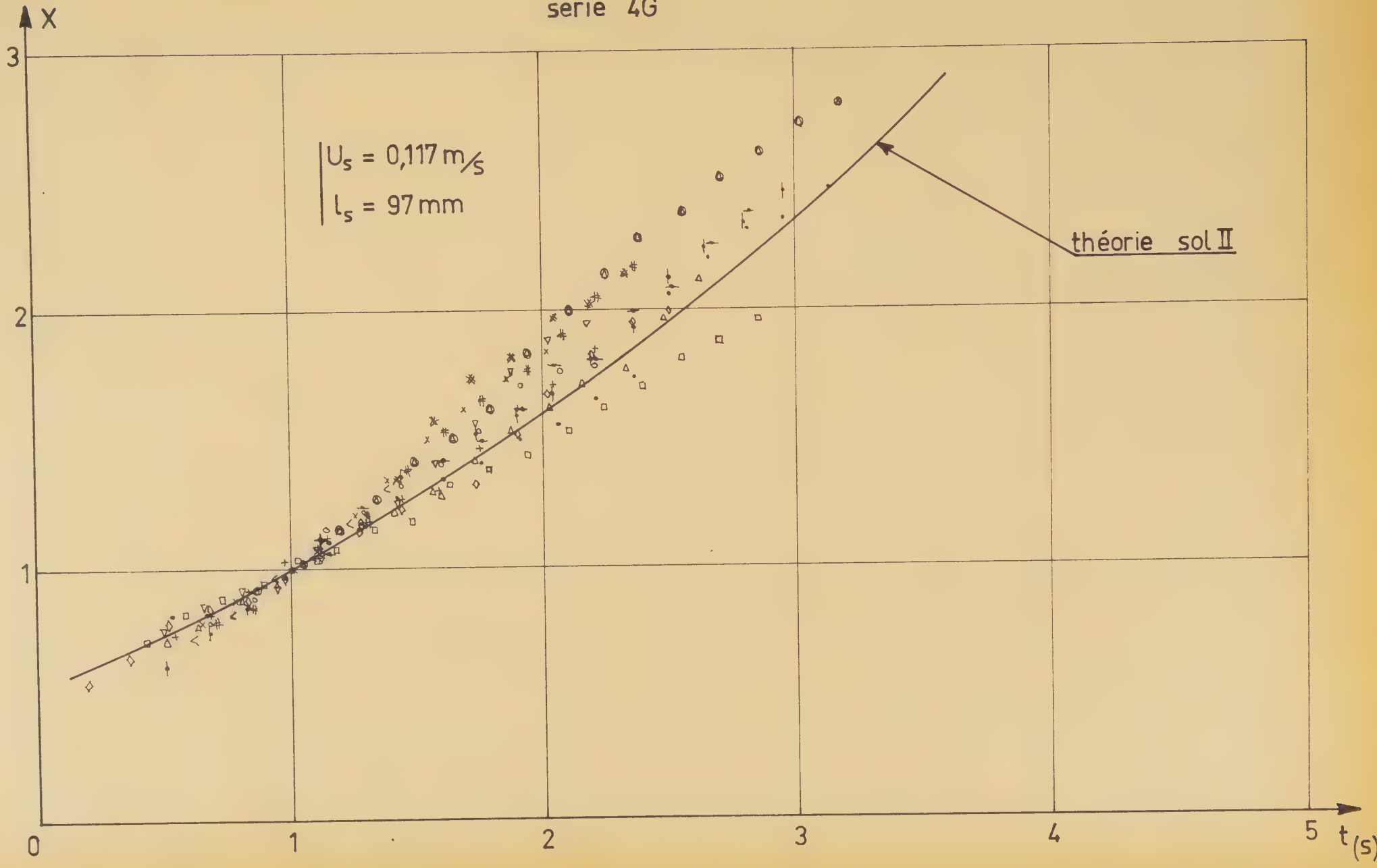


Fig. 97b

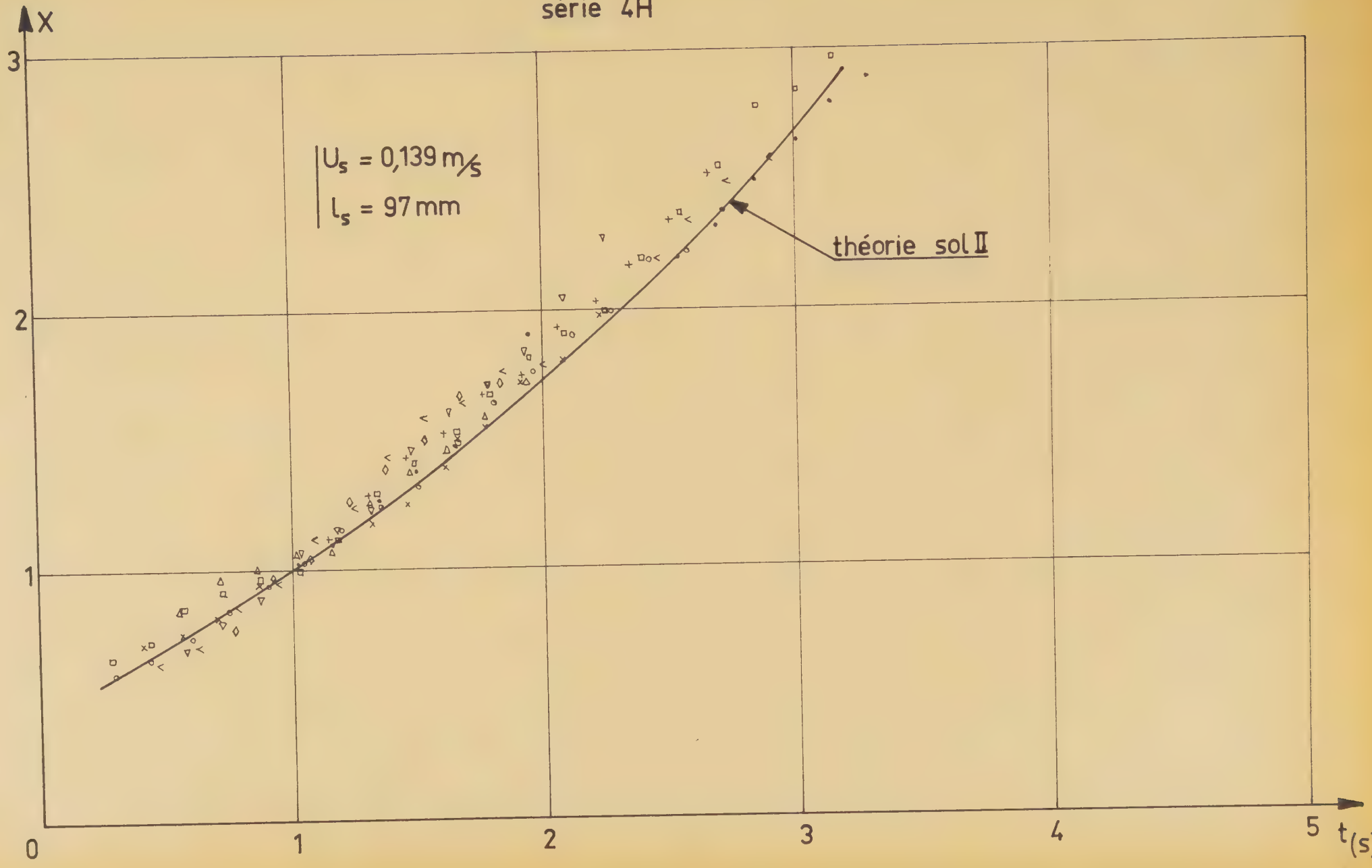


Fig.98a

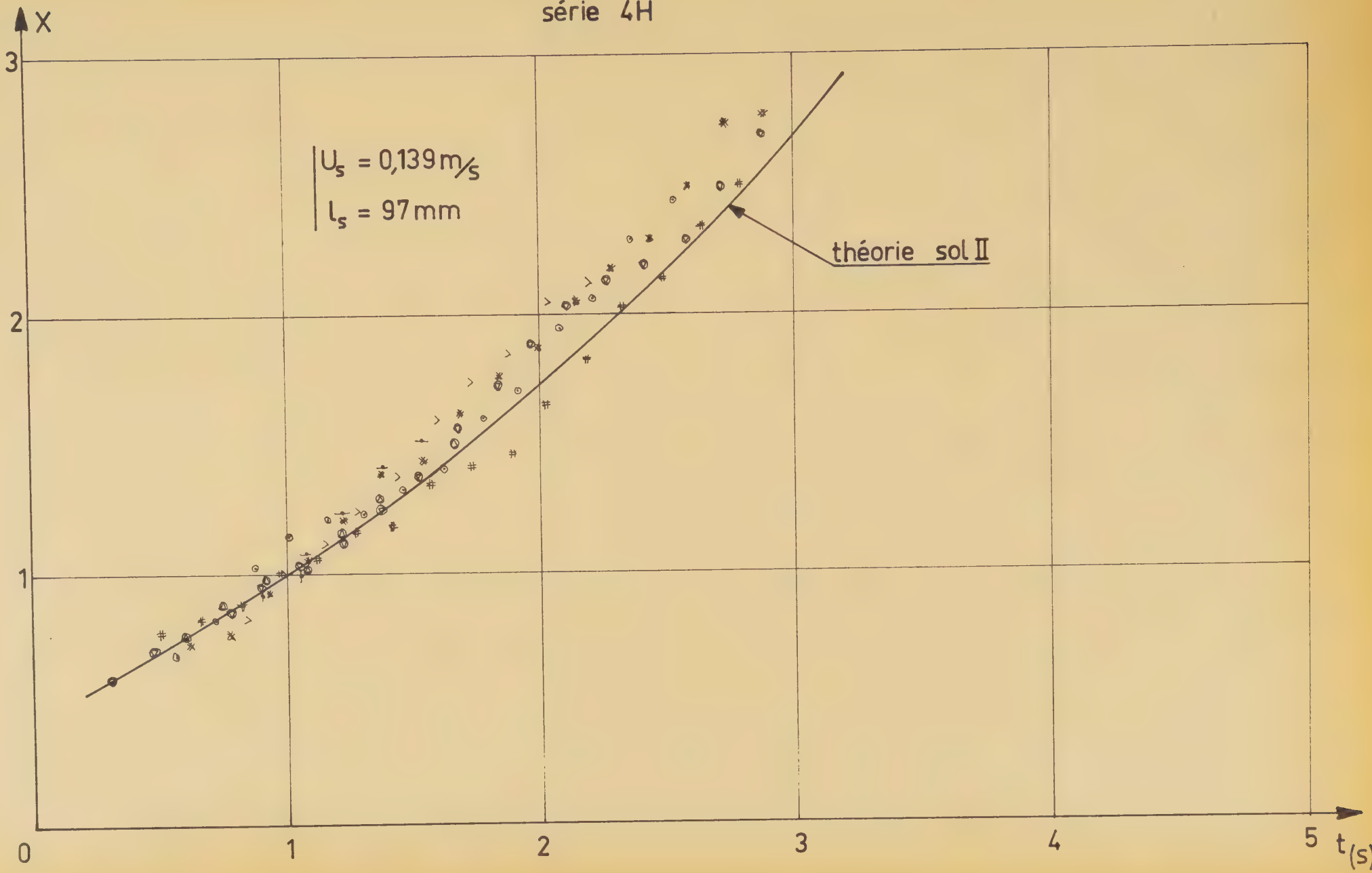


Fig.98b

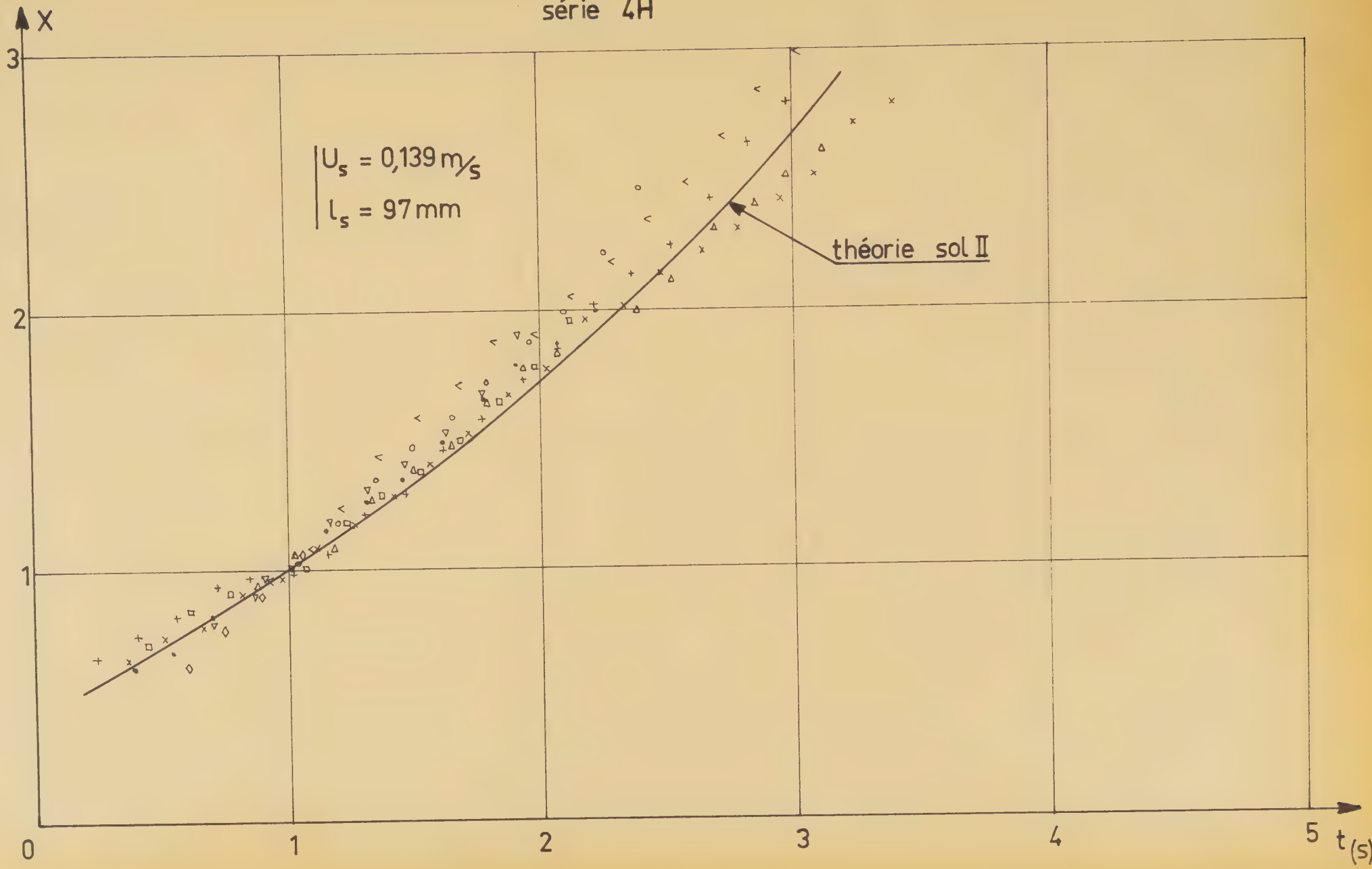


Fig. 98c

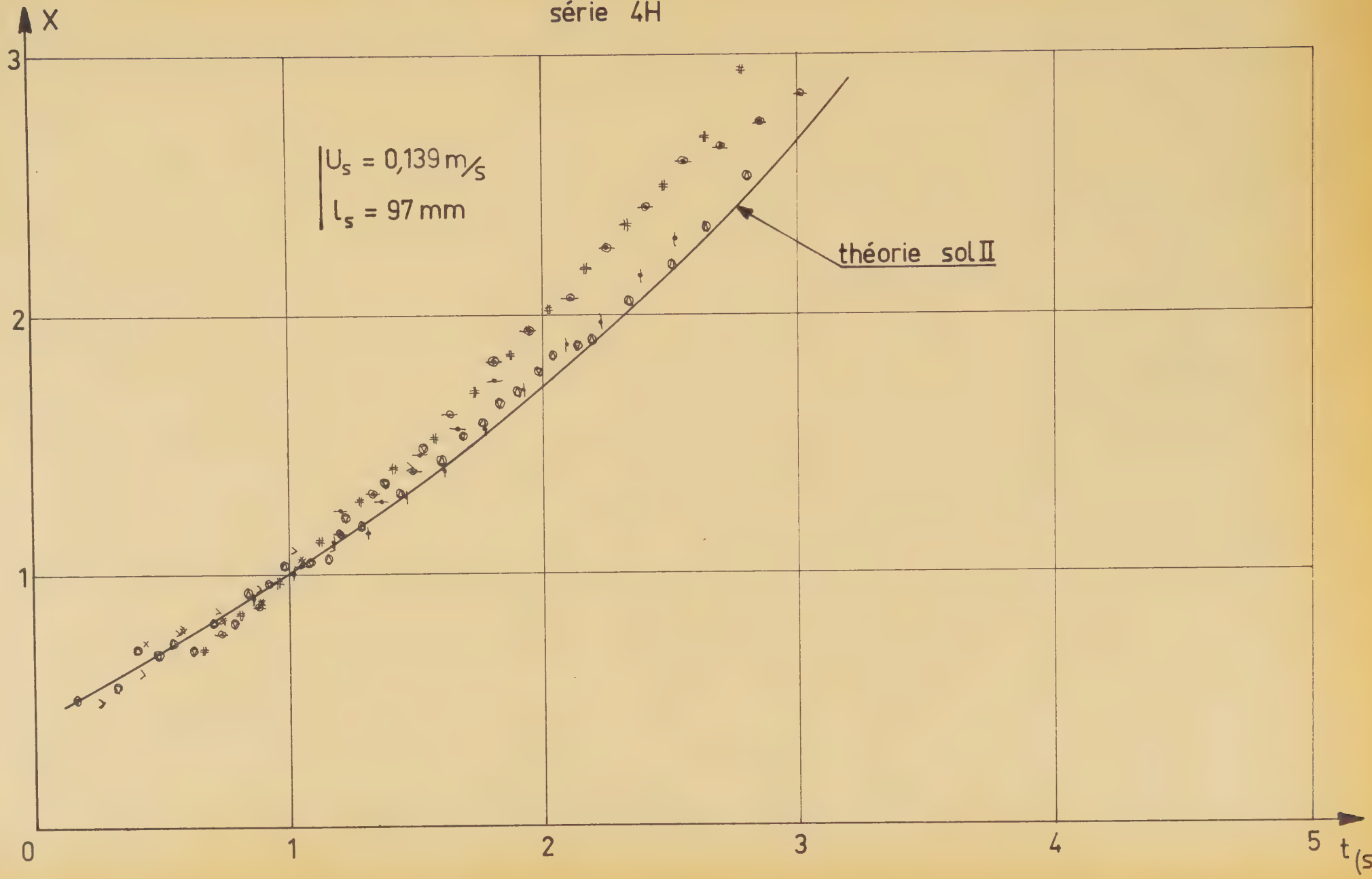


Fig.98d

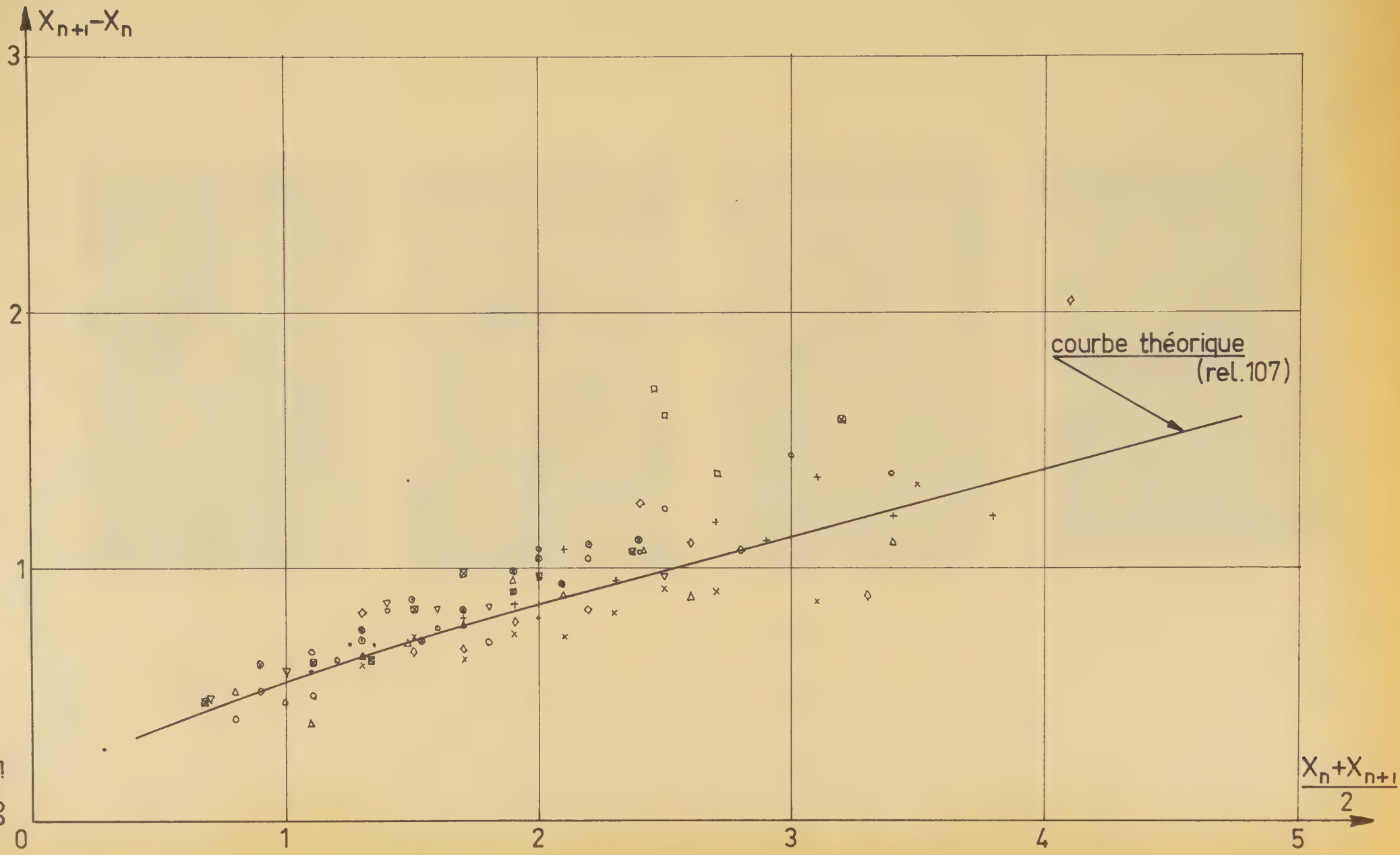
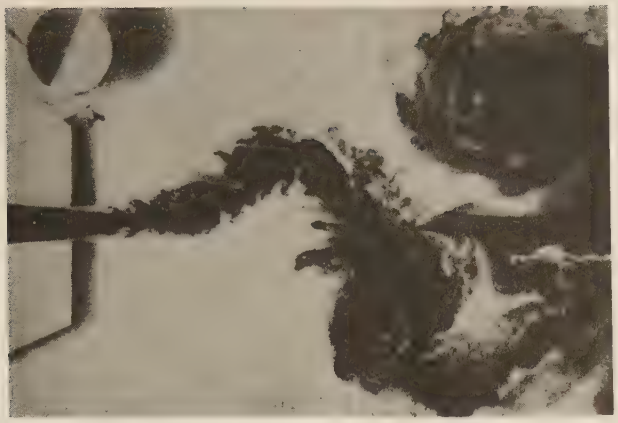
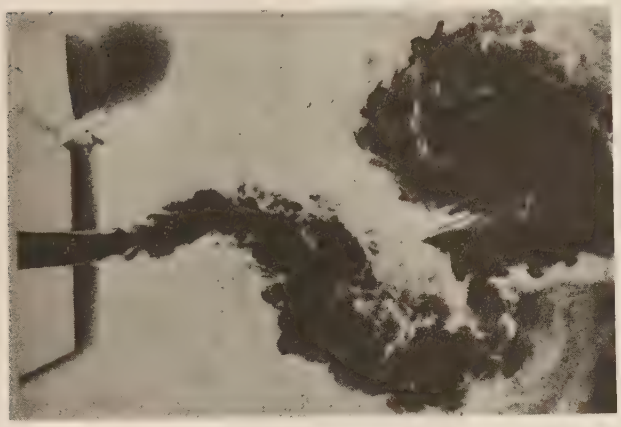
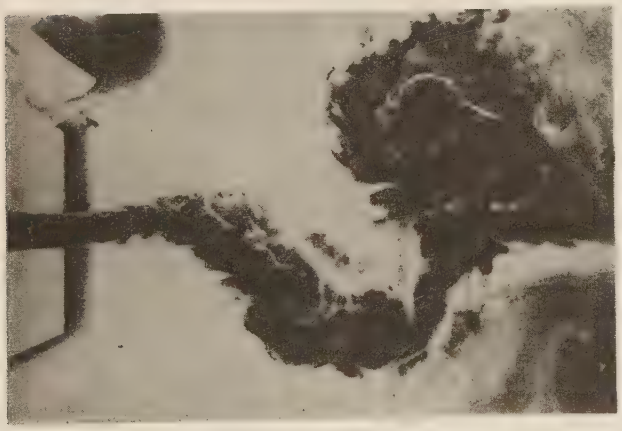


Fig.99







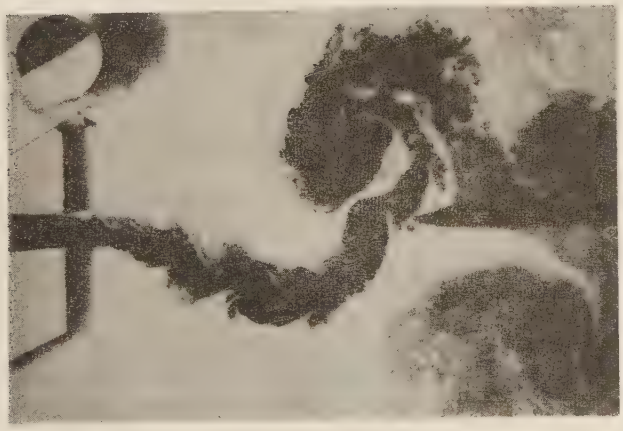
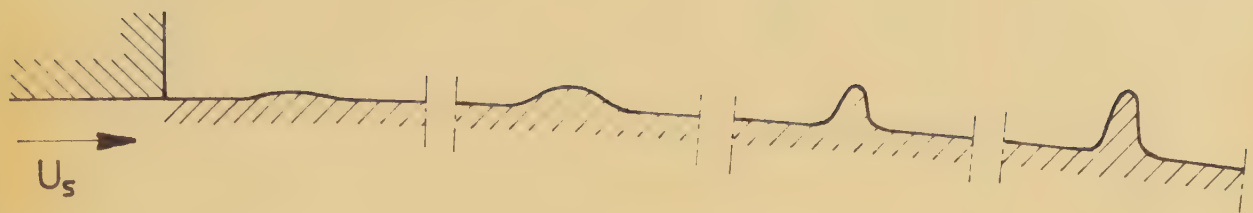
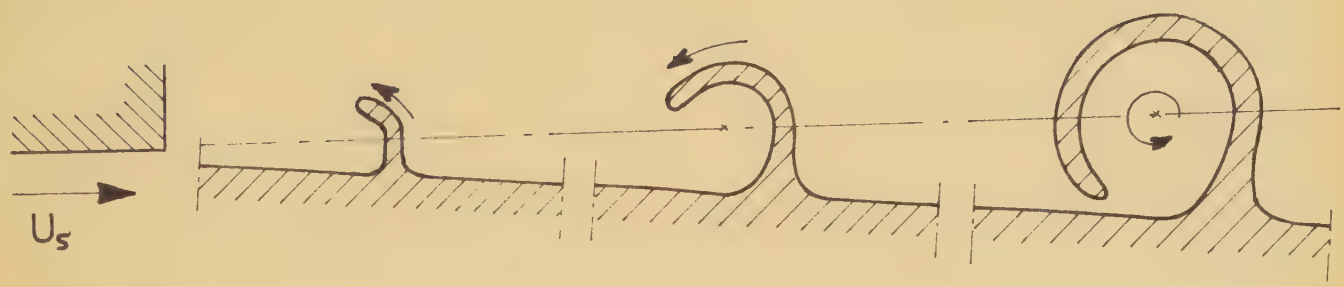


Fig.100



Zone I



Zone II

Processus de formation d'un tourbillon

Fig.101

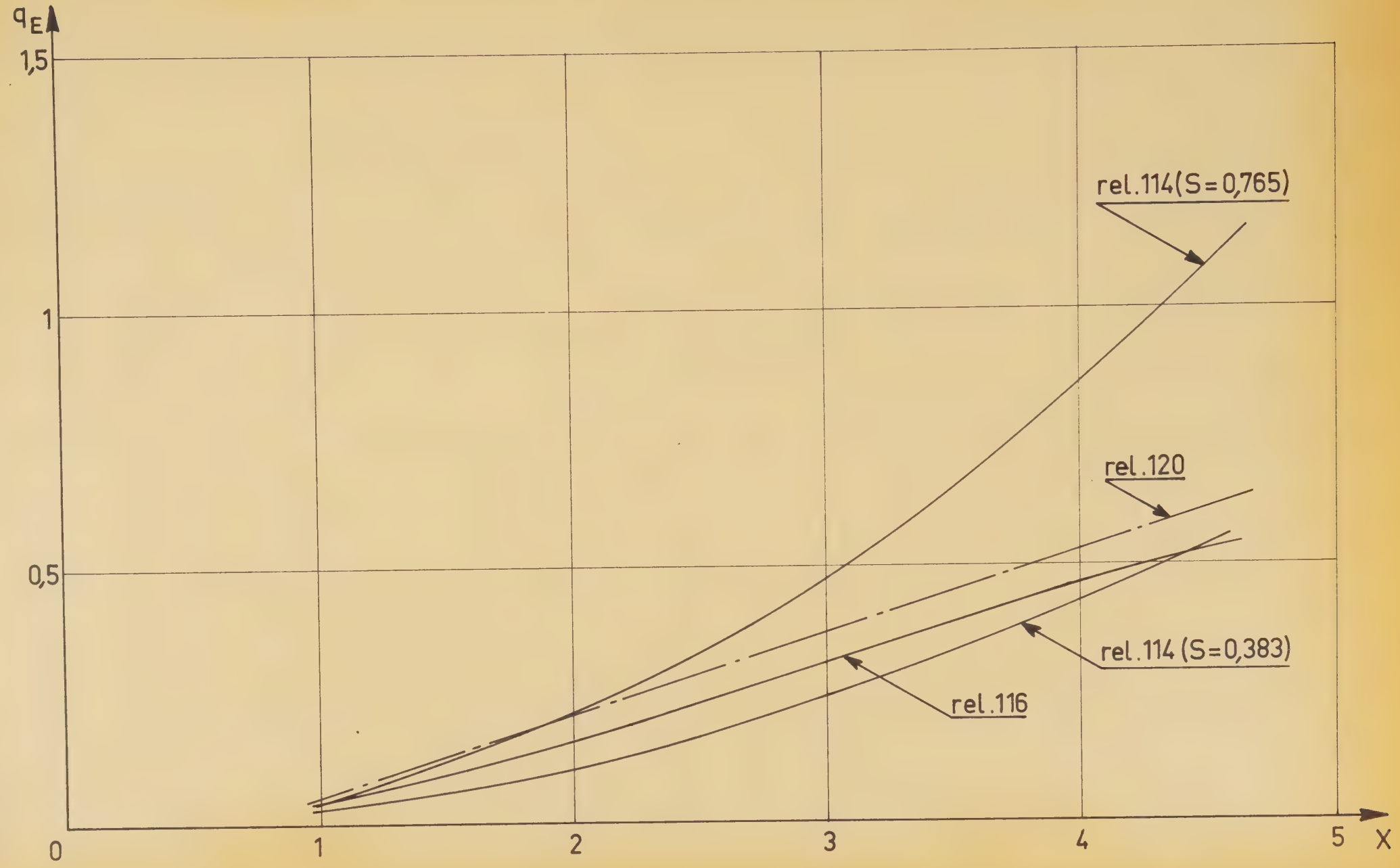


Fig.102

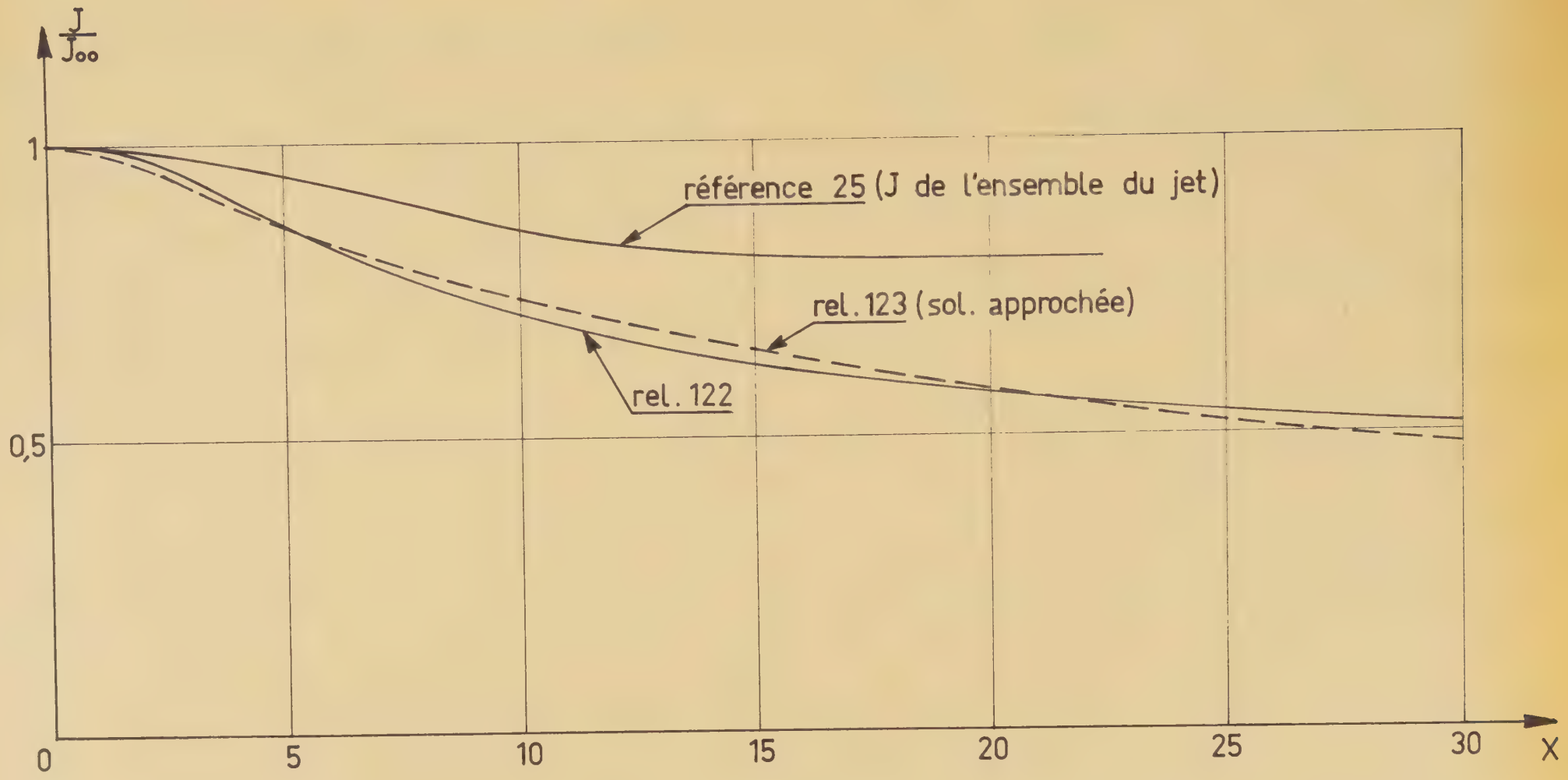

J/J∞
1
0,5
0
5
10
15
20
25
30
X
référence 25 (J de l'ensemble du jet)
rel. 123 (sol. approchée)
rel. 122

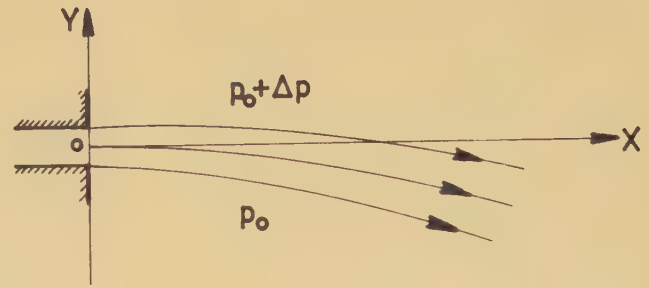
Fig. 103

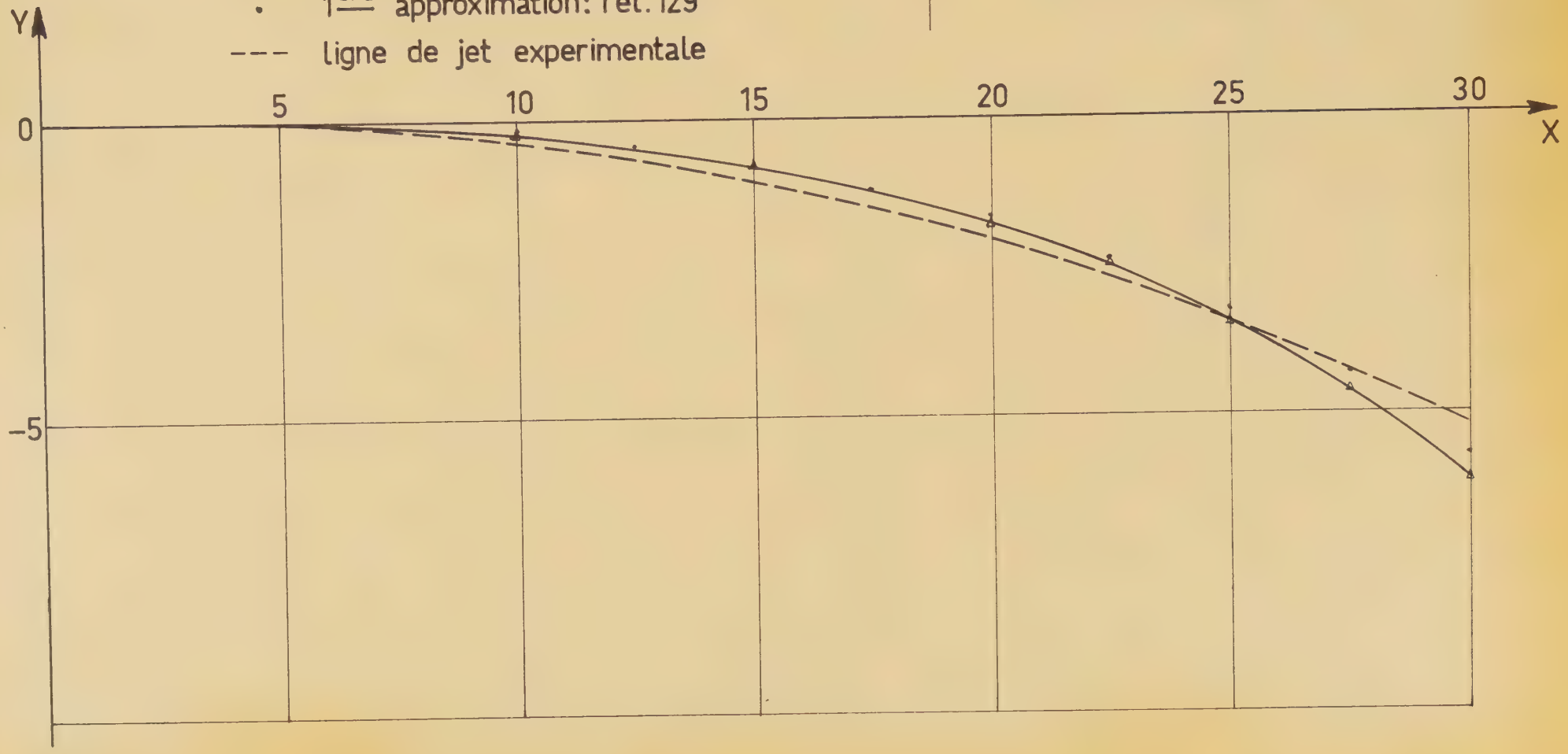
$$\alpha = \frac{\Delta p . l_s}{J_{oo}} = 0{,}000586\, X + 0{,}00273$$

△ 2eme approximation: rel.128

• $1^{\text{ére}}$ approximation: rel.129

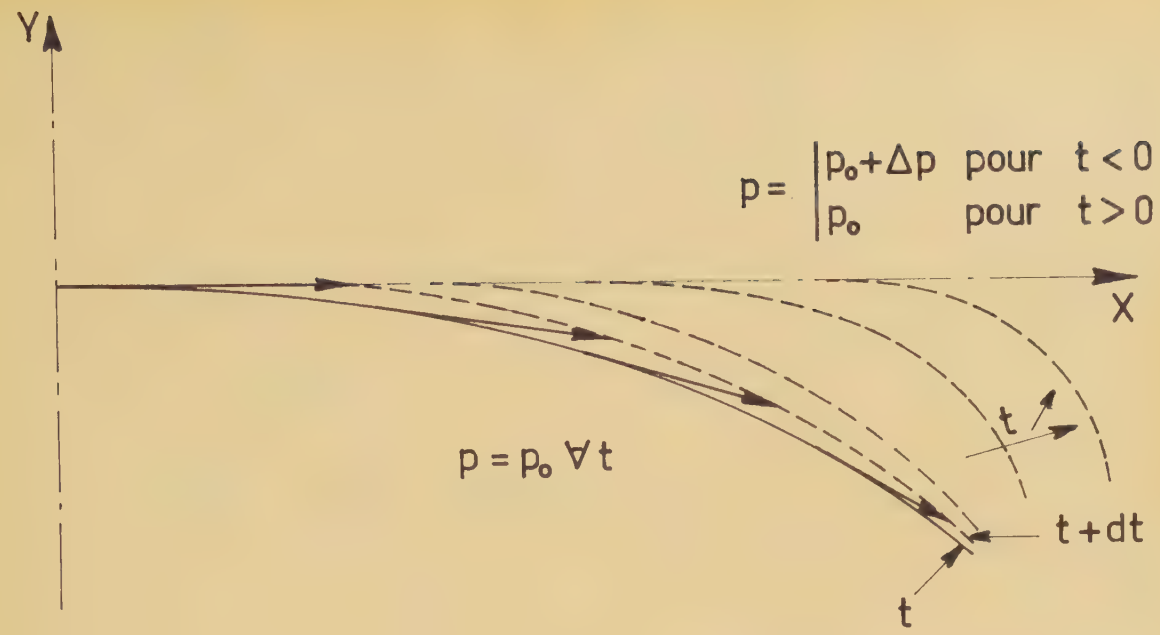
--- ligne de jet experimentale





Déviation statique d'un jet

Fig. 104



Déformation de la ligne joignant les particules M
pour un échelon négatif de pression

Fig.105

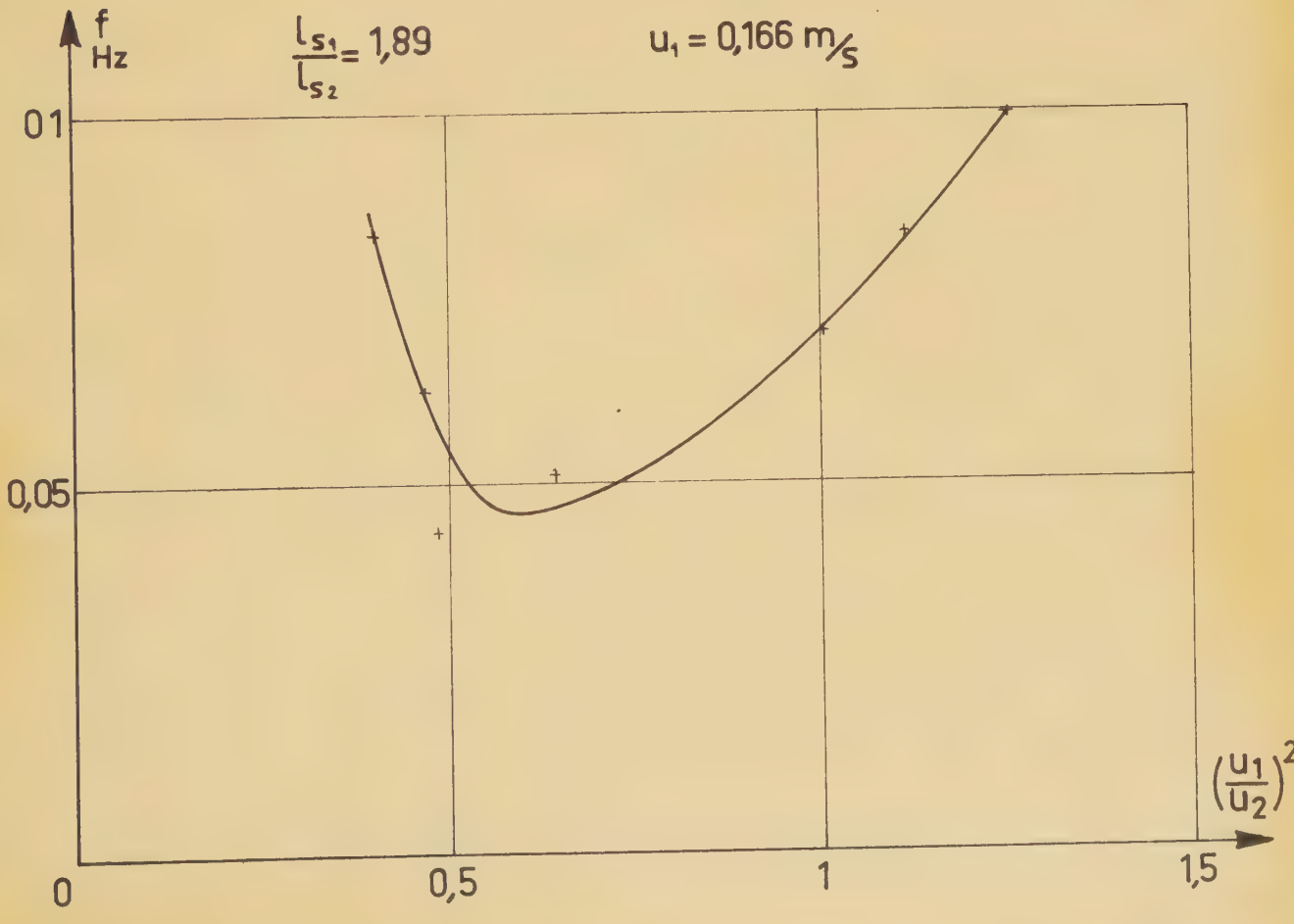


Fig.106

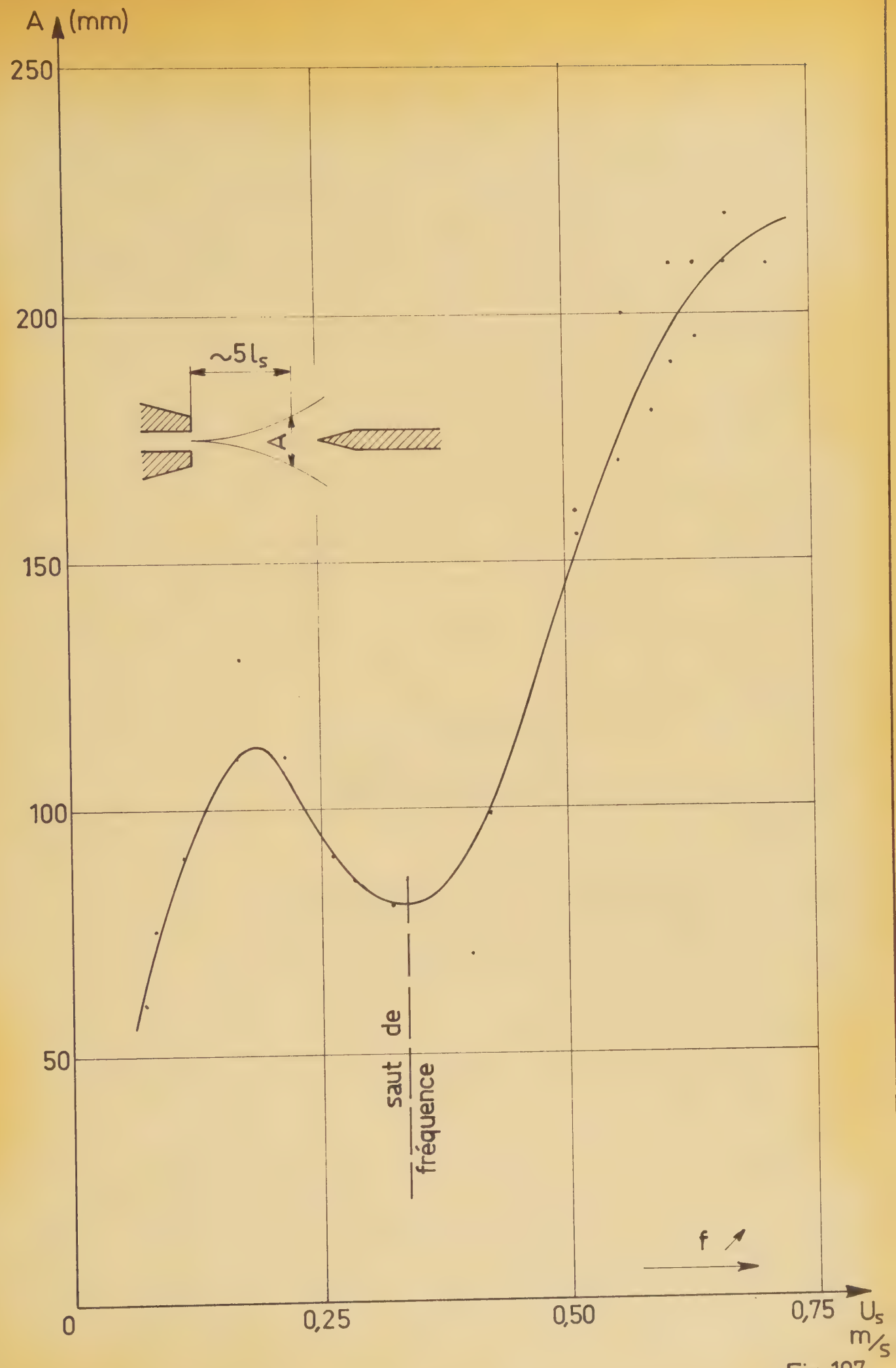

A (mm)
250
200
150
100
50
0
0,25
0,50
0,75
Us
m/s
~5ls
A
saut de fréquence
f

Fig.107

Numéro d'ordre : 382

Autorisation de soutenance
accordée.
TOULOUSE, le 12 FEV. 1970

Le Président du Conseil Transitoire,

F. MATHIS